

MATRICES

DEF:

$N \times N \rightarrow S$ (número de objetos)
 $(i, j) \rightarrow a_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, m$
 $j = 1, 2, \dots, n$

De esta manera:

a_{11}	a_{12}	a_{13}	\dots	a_{1n}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	\dots	\dots
a_{31}	a_{32}	a_{33}	\dots	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
a_{m1}	\dots	\dots	\dots	a_{mn}

ORDEN

a_{ij} : elemento que pertenece a la fila i y columna j .

NOTACIONES:

i) $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

ii) $A \in M_{m \times n}$

OBS: si $m = n \rightarrow$ la matriz es cuadrada y se suele denotar por A_n .

TIPOS DE MATRICES:

a) FILA

ejm: $(1 \ 2 \ 4 \ 8)_{1 \times 4}$

b) COLUMNA

ejm: $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$

c) NULA

ejm: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$

d) TRIANGULAR SUPERIOR

ejm: $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

EN GENERAL:

i) $n = m$

ii) $a_{ij} = 0, \forall i > j$

e) TRIANGULAR INFERIOR

ejm: $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

EN GENERAL:

i) $n = m$

ii) $a_{ij} = 0, \forall i < j$

f) Diagonal

$$EJM: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

EN GENERAL

- i) $n = m$
ii) $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$

g) Escalar

$$EJM: \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

EN GENERAL

- i) $n = m$
ii) $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$
 $a_{ii} = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

h) Identidad o Unidad

$$EJM: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

EN GENERAL

- i) $n = m$
ii) $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$
y $a_{ii} = 1$

i) Idempotente

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

2020

$$A^2 = A$$

j) Involuntiva

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A \times A = A^2 = I$$

k) Nilpotente

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$A^p = 0$, para algún $p \in \mathbb{N}$
 p : índice de nilpotencia
(menor posible).

l) Peribólica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$A^{n+1} = A$, $n \in \mathbb{Z}^+$
al menor n es el periodo
 $A^3 = A$, periodo 2.

m) Transpuesta

Dada una matriz $A \in M_{m \times n} \Rightarrow A^t$ es la transpuesta de A y $A^t \in M_{n \times m}$, tal que:

$$A = [a_{ij}] \quad A^t = [a_{ji}^t] \quad / \quad a_{ij}^t = a_{ji}$$

$$EJM: \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 2} = A \quad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

Propiedades:

- $(A^t)^t = A$
- $(A+B)^t = A^t + B^t$
- $(\lambda A)^t = \lambda \cdot A^t, \lambda \in \mathbb{R}$
- $(AB)^t = B^t \cdot A^t$, siendo $A_{m \times p}$ y $B_{p \times n}$

n) **Simétrica**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 6 & -3 & 8 \\ 0 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A = A^t, \quad a_{ij} = a_{ji}$$

Simétrica si coincide con la transpuesta

n) **Asimétrica o No Simétrica**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \neq -A^t, \quad a_{ij} \neq -a_{ji}$$

$$\text{si } i=j, \quad a_{ij} = 0$$

o) **Definición**

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{6} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{6} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -2\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^t = A^t \cdot A = I$$

Es un tipo especial de matriz invertible

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES:

1. Ejm

$$\begin{array}{ccc} I_1 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 = 8 \\ I_2 & 4 \times 8 & 3 \times 12 & 6 \times 10 & P_5 = 12 \\ I_3 & 2 \times 8 & 2 \times 12 & 2 \times 10 & P_6 = 10 \\ I_4 & 5 \times 8 & 4 \times 12 & 5 \times 10 & \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 128 \\ 60 \\ 138 \end{bmatrix}$$

DEF: A, B matrices conformables para la multiplicación el producto $AB = C$, tal que

$$A_{m \times n}, B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

$$C = [C_{ij}]_{m \times p} \text{ tal que } C_{ij} = [a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$$

$$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

TENER EN CUENTA:

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} f_1' \\ f_2' \\ \vdots \\ f_m' \end{bmatrix} \quad B_{n \times p} = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_p]$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} f_{1c_1} & f_{1c_2} & \dots & f_{1c_p} \\ f_{2c_1} & f_{2c_2} & \dots & f_{2c_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m c_1} & f_{m c_2} & \dots & f_{m c_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A c_1 & A c_2 & \dots & A c_p \end{bmatrix}$$

PROPIEDADES:

Sean A, B, C matrices conformables para la multiplicación correspondiente:

$$1) A \cdot B \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

$$2) A \cdot B \neq B \cdot A \quad (\text{NO ES CONMUTATIVA})$$

$$3) A \cdot I = I \cdot A = A \quad / \quad I_n \times A_n$$

$$4) \lambda (AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

5) DISTRIBUTIVAS:

$$i) A(B+C) = AB + AC$$

$$ii) (A+B)C = AC + BC$$

$$6) (AB)^t = B^t \cdot A^t$$

OBS

$$i) \text{ Si } AB = AC \Rightarrow \text{ Si } A \neq 0 \rightarrow B = C$$

$$ii) AB = 0 \rightarrow A = 0, B = 0.$$

Matrices Partes Comunes

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

OPERACIONES

a) SUMA : Sean $A, B \in M_{m \times n}$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

A_{ij} y B_{ij} tienen el mismo orden

Entonces: $A+B = \begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{bmatrix}$

b) MULTIPLICACIÓN: Sean A y B dos matrices con el mismo orden

$$A = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & \dots & n_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_1 & m_2 & \dots & m_n \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & \dots & n_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n_1 & n_2 & \dots & n_k \end{bmatrix}$$

$$n \times n$$

Ej:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4x5

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

5x4

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 89 & 12 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

4x4

Obs: Tener en cuenta que las columnas de A y filas de B deben quedar subdivididas de la misma forma, lo demás de acuerdo al contexto; para que la multiplicación matricial usando particiones.

TRANSUESTA:

Sea $A = [A_{ij}]$ ($i, j = 1, 2, \dots$); la Transpuesta de A es:

$$A^t = \begin{bmatrix} A_{11}^t & A_{21}^t \\ A_{12}^t & A_{22}^t \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

TRANSFORMACIONES ELEMENTALES FILA:

Dada la matriz A de orden $m \times n$ con filas f_1, f_2, \dots, f_m y columnas C_1, C_2, \dots, C_n , definimos 3 operaciones elementales:

- i) f_{ij} : significa intercambio de la fila i por fila j
- ii) $f_i(k)$: significa multiplicar la fila i por un escalar k
- iii) $f_{ij}(k)$: significa multiplicar la fila j por el escalar k y el resultado sumarlo a la fila i .

Esta última operación se acortaba denotarla también: $f_i + k f_j$
 las operaciones para las columnas son de manera análoga.

MATRIZ ELEMENTAL:

Resultado de aplicar una operación (transformación) elemental a la matriz identidad (I).

F_i : matriz elemental general de tipo fila
 C_j : matriz elemental general de tipo columna.

Los distintos índices elementales son:

- 1.- F_{ij} y C_{ij} que resultan de intercambiar en la matriz identidad I_{nn} las filas i y j , en el

caso de F_{ij} , o las columnas i y j en el caso C_{ij} .

- 2.- $F_i(k)$ y $C_i(k)$ que resultan de multiplicar en la matriz identidad I_{nn} la fila i por el escalar k ($F_i(k)$), o en la columna i por el escalar k ($C_i(k)$).

- 3.- $F_{ij}(k)$ y $C_{ij}(k)$ que resultan de sumar en la matriz identidad a la fila i la j multiplicada por el escalar k en el caso de $F_{ij}(k)$, o la columna i la j multiplicada por el escalar k , en el caso C_{ij} .

NOTA: La matriz que se obtiene al realizar una transformación elemental en la matriz A de orden $n \times m$ por filas (columnas) coincide con la matriz obtenida al multiplicar por la izquierda (derecha) la matriz A por la matriz elemental correspondiente.

MATRICES EQUIVALENTES

Dos matrices A y B , se dice que son equivalentes si una puede obtenerse a la otra mediante transformaciones elementales.

Por tanto, si A y $B \in M_{n \times m}$ son equivalentes, se tiene que:

$$B = F_r \cdot F_2 F_1 A C_1 C_2 \dots C_s$$

$$B = P_1$$

Siendo F_1, F_2, \dots, F_r matrices elementales que representan las transformaciones aplicadas a las filas de A y análogo a las columnas, para así obtener la matriz B .

Entonces si $P = F_1 \dots F_r$ y $Q = C_1 C_2 \dots C_s$ se tiene A y B son equivalentes si y sólo si existen P y Q regulares tales que: $B = PAQ$; P y Q son matrices de paso a paso.

MATRICES SEMEJANTES

Dos matrices A y B cuadradas de orden n son semejantes si existe una matriz P regular tal que: $B = PAP^{-1}$

NOTA:

Sea una matriz A de orden $m \times n$, luego:

$F_{**}A$, estará dada por cambios en la fila de A .
 AC_{**} , estará dada por cambios en las columnas de A .

Ahora podemos expresar las afirmaciones anteriores como:

$$F_{**}A = (F_{**}I)A = F_{**}(IA) = F_{**}A, \text{ donde } A_{m \times n}, I_{m \times m}$$

$$AC_{**} = A(C_{**}I) = (AI)C_{**} = AC_{**}, \text{ donde } A_{m \times n}, I_{n \times n}$$

Dos matrices A y B se denominan equivalentes por fila, se denota $A \sim B$, si una de ellas se obtiene de la otra mediante un número finito de transformaciones elementales de fila.

$$E_{31}: \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

INVERSA DE UNA OPERACIÓN ELEMENTAL:

La inversa de una operación elemental es otra operación que destruye el efecto de la inicial, reproduciéndose de este modo la matriz inicial.

Inversa de una matriz elemental:

- La inversa de F_{ij} se denota F_{ij}^{-1} y cumple $F_{ij}^{-1} = F_{ij}$
- La inversa de $F_i(\lambda)$ se denota $F_i(\frac{1}{\lambda})$ y cumple $F_i^{-1}(A) = F_i(\frac{1}{\lambda})$
- La inversa de $F_{ij}(k)$ se denota $F_{ij}^{-1}(k)$ y cumple $F_{ij}^{-1}(k) = F_{ij}(-k)$

Si una matriz B es la matriz escalonada (escalonada reducida por filas) correspondiente a la matriz A , decimos que tiene el mismo rango.

MATRICES ESCALONADAS Y ESCALONADAS REDUCIDAS

Una matriz se llama escalonada por renglones o excitada si cumple con las siguientes propiedades:

- a. Todos los renglones cero están en la parte inferior de la matriz
- b. El elemento delantero de cada renglón diferente de cero está a la derecha del elemento delantero diferente del renglón anterior.

EJMS :

3	-2	7	5	1
0	0	-4	7	9
0	0	0	1	6
0	0	0	0	0

0	-3	1	5
0	0	2	0
0	0	0	0

	0	0	0	0	7-
	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0

650-4

PIVOT DE UNA FILA:

Pivot de la fila i , es el 1er elemento distinto de cero que se encuentra en la fila i de la matriz

$$[0 \dots 0 \ a_{ik} \dots \ a_{i,n}]$$

$a_{ik} \neq 0$ pivot de la fila i

MATRIZ ESCALONADA REDUCIDA POR FILAS DE UMA MATRIZ:

- El primer elemento no nulo (pivot) de cada fila es 1
- Todas las componentes que se encuentran debajo del pivot de una fila son ceros.
- Las filas nulas, si hubieran existido por debajo de las filas no nulas.

ESMS	:
------	---

0	0	0	0	0	-5
0	0	0	1	0	4
0	0	0	0	0	-5
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0

0	1	3	4
1	0	5	-6

1	0	0
0	1	0
0	0	1

0	0	1
0	0	3
0	1	4
1	5	0

INVERSE

Una matriz cuadrada A se dice que es inversible (invertible) si existe una matriz B del mismo orden que A tal que:

$$AB = BA = I$$

B es la inversa de A, se denotará por $B = A^{-1}$

la matriz inversa es única, ya que si B y C son dos matrices inversas de una misma A , se tiene:

$$AB = BA = I, \quad AC = CA = I$$

$$B = BI = B(A^{-1}A) = (BA)I = I(B) = B$$

Además la inversa de B es A .

PROPIEDADES: Sean A y B matrices invertibles

a. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

b. $(A^{-1})^{-1} = A$

c. Si $AB = BA = I$ entonces $B = A^{-1}$ ($A = B^{-1}$)

d. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

e. $(rA)^{-1} = r^{-1}A^{-1}$, $r \neq 0$

f. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$$\begin{bmatrix} A & : & I \\ I & : & A^{-1} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \begin{bmatrix} I & : & A^{-1} \\ A & : & I \end{bmatrix}$$

Cálculo de la inversa de una matriz:

Para encontrar la inversa de una matriz cuadrada A

de orden n se parte del esquema $(A : I_n)$ y a continuación mediante un número finito de operaciones elementales

se debe llegar al esquema $(I_n : A^{-1})$ es como contrario se dice que no existe A^{-1}

EJM: Hallar la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3(1/2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2(-3)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tenemos: $F_{23}(-3) F_{13}(7) F_3(1/2) F_{12}(-2) F_{32}(1) F_{31}(-2) A = I$... (c)

Despejando: $A^{-1} = F_{23}(-3) F_{13}(7) F_3(1/2) F_{12}(-2) F_{32}(1) F_{31}(-2) I$... (c)

Las expresiones (a) y (b) constituyen el fundamento del método de Gauss - Jordan.

Demonstración del método de Gauss - Jordan:

Siendo A invertible, tenemos que existe la matriz P ($P \neq 0$) tal que $PA = I$, donde $P = F_1 F_{1-1} \dots F_2 F_{1-1} I$ siendo $F_1, F_2, \dots, F_{i-1}, F_i$ matrices elementales fila.

$$\text{luego } (A : I) \xrightarrow{P} (PA : PI) = (I : A^{-1}), \text{ con lo cual queda demostrado.}$$

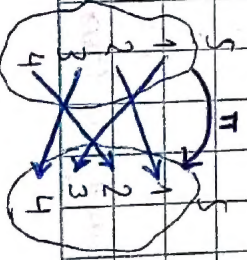
DETERMINANTES

DEFINICIONES

PERMUTACIÓN

EJM: $\{a, b, c\}$ abc acb bac bca cab cba

EJM: $S = \{1, 2, 3, 4\}$



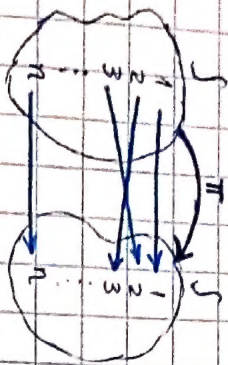
$$\pi(1) = 3$$

$$\pi(2) = 1$$

$$\pi(3) = 4$$

$$\pi(4) = 2$$

EN GENERAL: $S = \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$



$$\begin{aligned}\pi(1) &= 2 \\ \pi(2) &= 3 \\ \pi(3) &= 1 \\ \pi(n) &= n\end{aligned}$$

$$\pi = (\pi(1) \pi(2) \pi(3) \dots \pi(n))$$

INVERSIÓN DE UNA PERMUTACIÓN

EJEMPLO:

PAR $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$K(\pi_1) = 4$ (PAR)

IMPAR $\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$K(\pi_2) = 3$ (IMPAR)

EN GENERAL: una permutación π de $S = \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ siempre que:

$$\pi = (\pi(1) \pi(2) \pi(3) \dots \pi(i) \dots \pi(j) \dots \pi(n))$$

Se cumple que $\forall i, j$:

- a) $i < j$
- b) $\pi(i) > \pi(j)$

\exists una inversión.

NOTA:

Una permutación es par, si el número total de inversiones es par e impar si el total de inversiones es impar.

EJEMPLOS:

a) $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad K(\pi_1) = 7$

b) $\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 1 & 7 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad K(\pi_2) = 11$

OBS: Si $n \geq 2 \Rightarrow$ las permutaciones que se pueden obtener es a partir de $S = \{1, 2, \dots, n\}$ la mitad de ellas serán pares y la otra mitad impares.

PRODUCTO ELEMENTAL DE UNA MATRIZ:

Sea $A \in M_{n \times n}$ el producto elemental de dicha matriz es cualquier producto de n elementos de A de los cuales ningún par de elementos proviene de la misma fila o columna

ESM:

a) Si $A \in M_{3 \times 3}$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) \end{pmatrix}$$

$$A_{1\pi(1)} A_{2\pi(2)} A_{3\pi(3)}$$

b) Si $A \in M_{5 \times 5}$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \pi(4) & \pi(5) \end{pmatrix}$$

$$A_{1\pi(1)} A_{2\pi(2)} A_{3\pi(3)} A_{4\pi(4)} A_{5\pi(5)}$$

EN GENERAL:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

$$A_{1\pi(1)} A_{2\pi(2)} A_{3\pi(3)} \dots A_{n\pi(n)}$$

TRANSPOSICIÓN ADYACENTE

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad K(\pi_1) = 5 \text{ (IMPAR)}$$

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad K(\pi_2) = 4 \text{ (PAR)}$$

Es el intercambio de dos elementos adyacentes de una permutación.

Si se intercambian dos términos cualesquiera de una permutación seam o no adyacentes, se llama Transposición

CONCLUSIÓN: Una Transposición adyacente cambia la paridad de una permutación

ESM:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & \textcircled{3} & \textcircled{2} & 5 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$K(\pi) = 2 \rightarrow K(\pi_1) = 1 \rightarrow K(\pi_2) = 0$$

TEOREMA :

Si una permutación tiene n inversiones entonces aplicando n transposiciones adyacentes se puede reducir a su orden natural.

SIGNO DE UNA PERMUTACIÓN

$$\text{sgn}(\pi) = \begin{cases} 1 & \text{si } K(\pi) \text{ es par} \\ -1 & \text{si } K(\pi) \text{ es impar} \end{cases}$$

$K(\pi)$: # total de inversiones que tiene la permutación π .

Ej: Determine el signo de las permutaciones:

$$a) \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$K(\pi_1) = 4$$

$$\text{sgn}(\pi_1) = (-1)^4 = 1$$

$$b) \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$K(\pi_2) = 3$$

$$\text{sgn}(\pi_2) = (-1)^3 = -1$$

DEF :

Sea $A \in M_{n \times n}$ entonces:

$$\det A = \sum_{(s)} \text{sgn}(s) A_{1\pi(1)} A_{2\pi(2)} A_{3\pi(3)} \dots A_{n\pi(n)}$$

$$S = \{1, 2, \dots, n\}$$

Ej: Sea $A \in M_{3 \times 3}$ calcular su determinante.

$$\det A = \sum_{(s)} \text{sgn}(s) A_{1\pi(1)} A_{2\pi(2)} A_{3\pi(3)}$$

$$S = \{1, 2, 3\}$$

$$3! = 6$$

PAR (3)

IMPAR (3)

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K(\pi_1) = 3$$

$$\pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K(\pi_5) = 2$$

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$K(\pi_2) = 0$$

$$\pi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$K(\pi_6) = 2$$

$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$K(\pi_3) = 1$$

$$\pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$K(\pi_4) = 1$$

$$\begin{aligned}\text{sgn}(\pi_1) &= (-1)^3 = -1 \\ \text{sgn}(\pi_2) &= (-1)^0 = 1 \\ \text{sgn}(\pi_3) &= (-1)^1 = -1 \\ \text{sgn}(\pi_4) &= (-1)^1 = -1 \\ \text{sgn}(\pi_5) &= (-1)^2 = 1 \\ \text{sgn}(\pi_6) &= (-1)^2 = 1\end{aligned}$$

$$\det A = \sum_{(s)} \text{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} a_{3\pi(3)}$$

$$S = (1, 2, 3) \rightarrow \pi = (1, 2, 3)$$



$$\det A = -a_{13} a_{22} a_{31} + a_{11} a_{22} a_{33}$$

$$-a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}$$

$$+ a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}$$

EJM: Si $A \in M_{4 \times 4}$ y $A \in M_{5 \times 5}$ Calcular al menos 3 términos de sus determinantes.

SOL:

$A \in M_{4 \times 4}$

$$\det A = \sum_{(s)} \text{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} a_{3\pi(3)} a_{4\pi(4)}$$

$$S = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad K(\pi_1) = 3 \quad \text{sgn}(\pi_1) = (-1)^3 = -1$$

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad K(\pi_2) = 4 \quad \text{sgn}(\pi_2) = +1$$

$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad K(\pi_3) = 3 \quad \text{sgn}(\pi_3) = -1$$

$$\det A = -a_{12} a_{24} a_{31} a_{43} + a_{12} a_{23} a_{41} a_{34} - a_{12} a_{23} a_{34} a_{41} \dots$$

$A \in M_{5 \times 5}$

$$\det A = \sum_{(s)} \text{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} a_{3\pi(3)} a_{4\pi(4)} a_{5\pi(5)}$$

$$\det A = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} a_{55} - a_{11} a_{22} a_{33} a_{45} a_{54} + a_{11} a_{22} a_{34} a_{45} a_{53} \dots$$

PROPIEDADES

a) En cada término del desarrollo de una matriz, siempre aparece un de cada fila y un elemento de cada columna.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ } Cuando en una fila o columna todos sus elementos sean 0 el $\det(A) = 0$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 4 \times 1$ } En una matriz triangular superior o inferior $\det(A) = \text{multiplicación de elementos de diagonal principal}$

d) $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ $|B| = \begin{vmatrix} a & b & \lambda c \\ d & e & \lambda f \\ g & h & \lambda i \end{vmatrix}$ $|B| = \lambda |A|$ 0 filas \rightarrow columnas

e) $|\lambda A| = \begin{vmatrix} \lambda a_1 & \lambda a_2 & \lambda a_3 \\ \lambda b_1 & \lambda b_2 & \lambda b_3 \\ \lambda c_1 & \lambda c_2 & \lambda c_3 \end{vmatrix}$ $|B| = \lambda |A|$ $\Rightarrow |B| = \lambda^3 |A|$

f) $|A| = |A^T|$

$A \in M_{3 \times 3} \rightarrow + a_{12} a_{23} a_{31}$
 $+ a_{31} a_{12} a_{23}$

g) Si en una matriz cuadrada, se intercambian dos filas su determinante cambia de signo

h) Si en una matriz cuadrada tiene 2 líneas paralelas proporcionales, su determinante es 0.

i) Si se traslada una fila o columna (línea) k lugares, entonces su determinante queda multiplicado por $(-1)^k$

ESM: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $|B| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$|B| = (-1)^3 |A|$

j) Si a una línea cualquiera, se le suma un múltiplo escalar de otra línea diferente, entonces su determinante no cambia.

k) $A, B \in M_{n \times n} \Rightarrow \det(AB) = (\det A)(\det B)$

l) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 + \lambda \\ b_1 & b_2 & b_3 + \lambda \\ c_1 & c_2 & c_3 + \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = \det A + \det B$

m) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

Señalamos que:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$\det A = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

Desarrollo de Laplace:

Elm:

A =

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

→ det(A)

$$2 \times 2 \quad 3 \times 3 \quad 2 \times 2 \quad 3 \times 3 \quad + \dots$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & (-1) \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 0 & (-1) \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & (-1) \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} 1 & 2 & (-1) \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & (-1) \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & (-1) \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Aplicación:

$$20 \quad 20 \quad 100 \quad 100$$

$$= \sum \begin{vmatrix} 20 \times 20 & (-1) \\ 100 \times 100 \end{vmatrix}$$

ADJUNTA DE UNA MATRIZ

EM:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\dots \quad C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^T$$

EN GENERAL: $\text{Adj}(A) = [\text{Cofact}(A)]^T$

TEOREMA: Si $A \in M_{n \times n}$

$$\rightarrow A (\text{Adj}(A)) = (\text{Adj}(A)) A = |A| I$$

PRUEBA:

$$(A) \text{Adj}(A) = (\text{adj}(A))(A) = \det(A) I$$

Sea $A \in M_{n \times n}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A (\text{Adj}(A)) = \begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \det A & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{bmatrix} = \det A I_n$$

Consecuencia, sabemos que:

$$(\text{Adj}(A)) A = (A) (\text{Adj}(A)) = (\det A) (I_n)$$

luego: $\left(\frac{\text{Adj}(A)}{\det A} \right) A = A \left(\frac{\text{Adj}(A)}{\det A} \right) = \left(\frac{\det A}{\det A} \right) (I_n)$

$$\underbrace{\left(\frac{\text{Adj}(A)}{\det A} \right)}_{A^{-1}} A = A \underbrace{\left(\frac{\text{Adj}(A)}{\det A} \right)}_{A^{-1}} = \underbrace{\left(\frac{\det A}{\det A} \right)}_{I_n} (I_n)$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{\det(A)}$$

PROPIEDADES:

1.- $\text{Adj}(A) = (A^{-1}) \det(A)$

2.- $|\text{Adj}(A)| = (\det A)^{n-1}$

PRUEBA: $\text{Adj}(A) = (A^{-1})(\det A)$

$$|\text{Adj}(A)| = |(A^{-1})(\det A)|$$

$$|\text{Adj}(A)| = (\det A)^n |A^{-1}|$$

$$|\text{Adj}(A)| = (\det(A))^n \cdot \frac{1}{\det(A)}$$

$$\therefore |\text{Adj}(A)| = (\det A)^{n-1}$$

3.- $\text{Adj}(\lambda A) = \lambda^{n-1} \text{Adj}(A), \lambda \neq 0$

4.- si $A, B \in M_{n \times n}$

$$\text{Adj}(AB) = \text{Adj}(B) \text{Adj}(A)$$

5.- $\text{Adj}(\text{Adj}(A)) = A (\det A)^{n-2}$

6.- $\det(\text{adj}(\text{adj}(A))) = (\det A)^{(n-1)^2}$

7.- $\text{Adj}(A^{-1}) = \det(A^{-1}) A$

8.- $\det(\text{Adj}(A^{-1})) = (\det A)^{-n+1}$

RANGO DE UNA MATRIZ

ejm:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r(A) = 2$$

Proposición: sabemos $A \sim B \rightarrow r(A) = r(B)$

Luego: $A \sim E_n \rightarrow r(A) = r(E_n)$

matriz escalonada.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

1	2	3	4
0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
0	0	1	1

Matriz en su Forma Natural

$$\begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_{r'} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, I_r$$

- Calcular el rango de A

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 & 9 \\ 4 & 8 & -8 & 14 \\ -2 & -4 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

3	6	-3	9
4	8	-8	14
-2	-4	-2	-4

$\frac{1}{2}$	1	2	-1	3
$\frac{1}{2}$	0	0	-4	2
$\frac{1}{2}$	0	0	-4	2

1	2	-1	3
0	0	-4	2
0	0	0	0

1	2	-1	3
0	0	-2	1
0	0	0	0

$$\begin{array}{r} C_2(1) \\ C_3(1) \\ C_4(1) \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1	0	0	0
0	1	0	-2
0	0	0	0

[illegible]

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow \sqrt{CA} = 2$$

A =

0	1	0	1	1
2	0	1	0	0
2	1	1	1	1

$K(A) \rightarrow$ "determinantes"

\swarrow

Escalonada

Normal

b) Calculamos todas las sub-matrices de orden 3 y determinamos los valores de los determinantes de cada una de ellas.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \quad \dots$$

$$b) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$r(A) = 2$$

2) Escalonada:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$[E]$ escalonada por filas

$$r(A) = r(E) = r \quad (r: \text{número de filas no nulas de } E)$$

3) Forma normal:

$$A : \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r(A) = r$$

PROPIEDADES:

a) $r(A_{m \times n}) \leq \min(m, n)$

b) $r \begin{pmatrix} A & B \\ \min & \max \end{pmatrix} \leq \min \{ r(A), r(B) \}$

c) $r(AB) = r(AB)^T \quad AB = EF$

d) las matrices A, BA, AC, BAC siendo B, C no singulares tienen el mismo rango.

producto de matrices elementales
Al hacer operaciones elementales a la matriz A se mantiene su rango.

e) $r(A) = r(A)^T, \quad A \in M_{m \times n}$

f) $A, B \in M_{m \times n}$

a) $r(AB) = n \iff r(A) = r(B) = n$

b) $|A| \neq 0 \iff r(A) = n$

c) si $AB = 0 \implies r(A) + r(B) \leq n$

d) si $A + B = I \implies r(A) + r(B) \geq n$
si 0 entonces $r(A) + r(B) = n$

g) $A, B \in M_{m \times n} \implies r(A+B) \leq r(A) + r(B)$

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

LINEALES

a) $x + y = 5$

c) $x + y = 9$

$x - y = 3$

b) $x + y + z = 4$

$x - y + 4z = 12$

$3x + y - z = 5$

d) $x + y - 3z = 4$

$x - 2y + z = 5$

En general:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$A \quad X \quad b$

Es decir:

$$AX = b \quad A \in M_{m \times n}, \quad X \in M_{n \times 1} \text{ y } b \in M_{m \times 1}$$

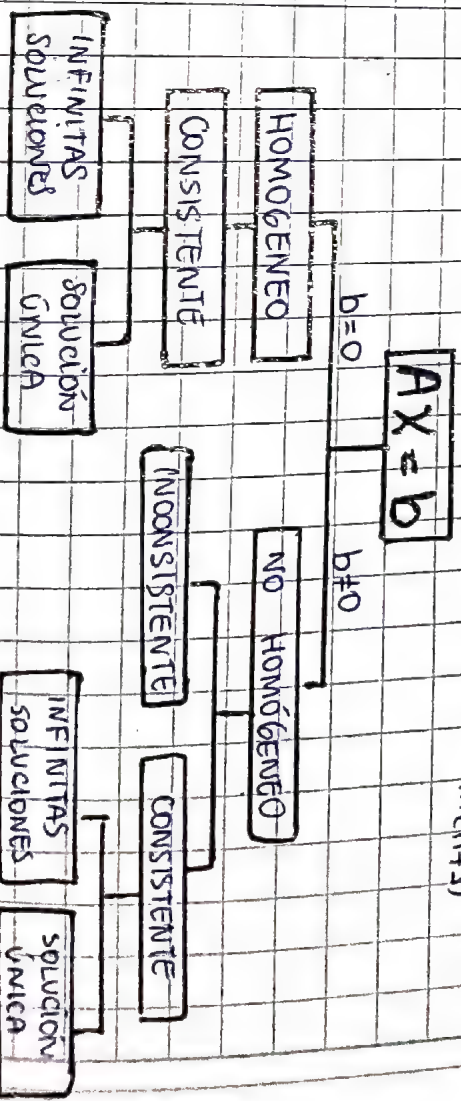
A: matriz de coeficientes

X: matriz de incógnitas o variables

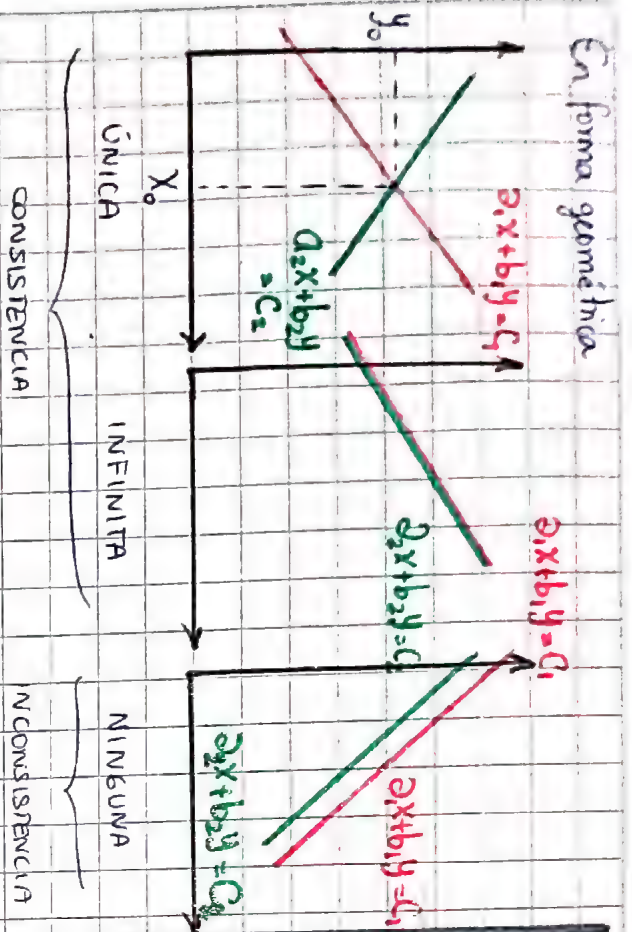
b: matriz de términos independientes

MATRIZ AMPLIADA DE A:

$$A_0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \quad (m \times (n+1))$$



En forma geométrica



SISTEMA DE ECUACIONES CONJUNTAS

Sean $A, B \in M_{m \times n}$, $X \in M_{n \times 1}$, $b_1, b_2 \in M_{m \times 1}$,
entonces:

$$AX = b_1 \dots (A) \quad B X = b_2 \dots (B)$$

Dichos sistemas (A) y (B) son equivalentes \Leftrightarrow tienen las mismas soluciones

$$\text{Ejm: } \begin{cases} 4x + y = 12 & (A) \\ x + 3y = 5 & (B) \end{cases}$$

TEOREMA DE Rouché - Frobenius:

Si tenemos: $AX = b$, $A \in M_{m \times n}$, $X \in M_{n \times 1}$, $b \in M_{m \times 1}$

Podemos tener:

a) $r(A_0) = r(A) \Rightarrow \exists$ solución

i) $r(A_0) = r(A) = n \Rightarrow \exists$ solución única

ii) $r(A_0) = r(A) = r < n \Rightarrow \exists$ infinitas soluciones

que se pueden expresar en función de $(n-r)$ parámetros

b) $r(A_0) \neq r(A) \Rightarrow$ inconsistentemente (\nexists solución)

Ejm: Resolver:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -6 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -18 \end{cases}$$

SOL:

$$\begin{array}{c} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -6 \\ 3 & 1 & 1 & -18 \end{bmatrix}}_{A_0} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -12 \\ 0 & 4 & -2 & -24 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \underbrace{\phantom{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}}_{A} \quad \underbrace{\phantom{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}}_{E_0} \quad \underbrace{\phantom{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}}_{EA_0} \end{array}$$

Luego:

$$\left. \begin{aligned} X_1 - X_2 + X_3 &= 2 \\ 2X_2 - X_3 &= -12 \end{aligned} \right\}$$

¿Existe solución?

- Análisis:

$$r(A) = r(E) = 2$$

$$r(A) = r(E) = 2 \left\{ \begin{aligned} r(A_0) &= r(A) = 2 \rightarrow \exists \text{ solución} \\ \text{pero como } r < 3 &\rightarrow \exists \text{ infinitos} \end{aligned} \right.$$

soluciones que expresen en función de $(3-2) = 1$ parámetro

- Cálculo de la solución:

$$\begin{aligned} X_1 - X_2 + X_3 &= 2 \rightarrow X_1 = \frac{1}{2} - 4 \\ 2X_2 - X_3 &= -12 \rightarrow X_2 = \frac{1}{2} - 6 \end{aligned}$$

$$X_3 = t$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} - 4 \\ \frac{1}{2} - 6 \\ t \end{bmatrix}$$

También lo puede expresar como:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \frac{t}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

- Para que valores de a el SEL presenta infinitas soluciones:

$$\begin{aligned} x + y + az &= 3a^2 + 3a \\ x + ay + z &= 2a^2 + 4a \\ ax + y + z &= a^2 + 5a \end{aligned}$$

SOL:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 3a^2 + 3a & 1 & 1 & 0 & 3a^2 + 3a \\ 1 & a & 1 & 2a^2 + 4a & 0 & 0 & 1 & -a^2 + a \\ a & 1 & 1 & a^2 + 5a & 0 & 1 & -a & -2a^2 + 5a - 3a^3 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 3a^2 + 3a & 1 & 1 & 0 & 3a^2 + 3a \\ 0 & a-1 & 1-a & -a^2 + a & 0 & 0 & 1 & -a^2 + a \\ 0 & 0 & -a^2 + a + 2 & -3a^2 + 6a - 3a^3 & 0 & 0 & 1 & -a^2 \end{array}$$

Por condición, como debe existir infinitas soluciones:

$$r(A) = r(A_0) = r < 3 \Rightarrow r(E_3) = r(E_3) = 3 \vee 2$$

i) Si el rango es 1 los elementos de la segunda y tercera fila deben ser ceros $\Rightarrow a = 1$

ii) Si el rango es 2, debe cumplirse

$$2 - a^2 - a = 0 \wedge -3a^2 + 6a - 3a^3 = 0$$

De donde se obtiene que:

$$\underbrace{a = -2}_{\text{si cumple}} \quad \underbrace{a = 1}_{\text{no cumple}}$$

SISTEMA HOMOGÉNEO

Se tiene:

$$AX = 0 \quad / \quad A \in M_{m \times n}, \quad X \in M_{n \times 1}, \quad 0 \in M_{m \times 1}$$

Tenemos:

$$A_0 = [A:0] \quad \left\{ \begin{array}{l} r(A) = r < n \rightarrow \exists \text{ infinitas soluciones} \\ r(A) = n \rightarrow \exists \text{ solución única} \end{array} \right.$$

OBS: En el primer caso las soluciones se expresarán en función de $(n-1)$ parámetros o variables libres.

TENER EN CUENTA:

$$AX = 0, \quad A \in M_{m \times n}, \quad X \in M_{n \times 1} \quad \text{y} \quad 0 \in M_{m \times 1}$$

$$S_i \quad m = n \quad \left\{ \begin{array}{l} |A| = 0 \rightarrow \exists \text{ infinitas soluciones} \\ |A| \neq 0 \rightarrow \exists \text{ solución única, la trivial} \end{array} \right.$$

$$S_i \quad m < n \quad \text{El SEL homogéneo tiene infinitas soluciones}$$

EJM: Determinar el valor de k , de modo que el SEL homogéneo tenga soluciones distintas a la trivial

$$\begin{array}{rcl} x + 2ky - kz & = & 0 \\ 3x + (k+1)y - 2z & = & kx \\ x + ky - z & = & 0 \end{array}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2k-1 & -k & 0 \\ 3-k & k+1 & -2 & 0 \\ 1 & k & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 0 = k^3 - 4k^2 + 5k - 2 = 0$$

$$(k-1)^2(k-2) = 0$$

$$k = 1 \vee k = 2$$

EL SEL presenta infinitas soluciones si $k = 1 \vee k = 2$.

RELACION ENTRE EL SEL $AX = b$ Y SU SISTEMA HOMOGÉNEO ASOCIADO $AX = 0$

EJM: SISTEMA NO HOMOGÉNEO:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = -1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 1 \end{array} \right\} \quad (I)$$

SISTEMA HOMOGÉNEO:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = -1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \end{array} \right\} \quad (II)$$

SISTEMA HOMOGÉNEO ASOCIADO

0300
[A] $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
 $|A| \neq 0$ solución única
 $|A| = 0$ infinitas soluciones

luego:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2(1)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2(1) \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 14 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3(1/2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{matrix}$$

Cálculo de la solución del sistema homogéneo.

$$\begin{cases} x_1 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ x_2 + 0 + 2x_4 = 0 \\ x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2t \\ -7t \\ t \end{bmatrix}$$

Cálculo de la solución del sistema no homogéneo:

$$\begin{cases} x_1 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ x_2 + 2x_4 = 2 \\ x_3 + 7x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2t+2 \\ -7t+3 \\ t \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{S_p} + \underbrace{\begin{bmatrix} -2t \\ -7t \\ -t \end{bmatrix}}_{S_h}$$

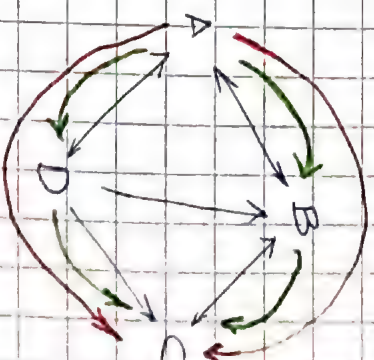
Es decir: $AX = b \rightarrow X = X_p + X_h$

$$\begin{matrix} X_p \leftarrow AX = b \\ X_h \leftarrow AX = 0 \end{matrix} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} X_p \\ X_h \end{matrix}} \right\} X = X_p + X_h$$

	A	B	C	D
A	NO	SI	NO	SI
B	SI	NO	SI	NO
C	NO	SI	NO	NO
D	SI	SI	SI	NO

FORMA MATRICIAL

$$E = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & 0 & 1 & 0 & 0 \\ D & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Calculo de E^2 .

$$E^2 =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{13} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 2$$

A_{ij} : significa que existen dos rutas de dimension 2; para unir A con C.

Si tenemos E^3 .

$$E^3 =$$

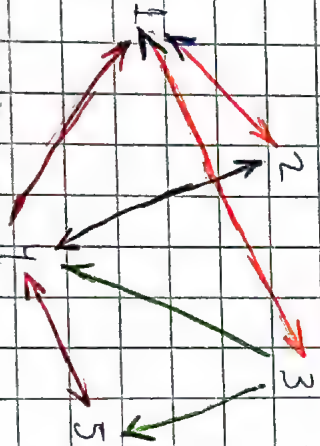
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

A_{ij} : significa que existe un número de rutas indicado por el valor de A_{ij} para unir dos puntos; tal que su dimensión sea 3.

PROBLEMA

INSEGURIDAD.

CIUDADANA.



REGRESION LINEAL

$$AX = b$$

SOL

$$(A^T A)X = A^T b$$

$$(A^T A)^{-1} (A^T A) X = (A^T A)^{-1} A^T b$$

$$X = (A^T A)^{-1} \cdot (A^T b)$$

Ejem p l o :

$$Y = b_0 X_0 + b_1 X_1 + \dots + b_k X_k + 0$$

MESES	PASAJEROS	PUEBLADA	IN	Y
1	15	10	2,40	3,20
2	17	12	2,72	3,25
3	13	18	2,08	3,22
15	16	17	2,17	3,60

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 2,4 & 3,20 & 1 \\ 12 & 2,72 & 3,25 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 12 & 2,17 & 3,60 & 1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 35 \\ 17 \\ \vdots \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$AX = Y$$

$$(A^T A) X = A^T Y$$

$$X = (A^T A)^{-1} A^T Y$$

Regla de Cramer

Sea: $AX = b$ / A : no singular y $A \in M_{n \times n}$

$X \in M_{n \times 1}$ y $b \in M_{n \times 1}$

Entonces

$$A^{-1} \cdot A X = A^{-1} b$$

$$X = A^{-1} b$$

Donde: $X_k = \frac{|A_k|}{|A|}$; $k = 1, 2, 3, \dots, n$

A_k : matriz donde la columna k de A , se reemplaza por b .

Modelos Económicos

Tenemos un modelo que considera el mercado de producto y el mercado laboral como sigue:

$$C_T = \alpha_0 + \alpha_1 Y_T + \alpha_2 C_{T-1} + \alpha_3 t + u_{2t}$$

$$I_T = \beta_0 + \beta_1 (C_T - C_{T-1}) - \beta_2 I_{T-1} + u_{3t}$$

$$Y_T = C_T + I_T + G_T$$

$$D_{MT} = g_0 - g_1 W_T + u_{5T}$$

$$S_{MT} = \lambda_0 + \lambda_1 W_T + u_{4T}$$

$$D_{MT} = S_{MT}$$

C_T : consumo nacional

I_T : inversión neta

Y_T : ingreso nacional

T : tiempo

I_{T-1} : tasa de interés del período precedente

G_T : gastos públicos de bienes y servicios

D_{MT} : demanda de mano de obra

W_T : índice de salarios neta

S_{MT} : oferta de mano de obra

$$0 < \alpha_1 < 1$$

$$0 < \alpha_2 < 1$$

$$\beta_1, \beta_2 > 0$$

$$g_1 > 0$$

$$\lambda_1 > 0$$

V. endógenas: $C_t, Y_t, I_t, D_{MT}, S_{MT}, W_t$ (nuevas)
 V. exógenas: $C_{t-1}, t, I_{t-1}, I_{t+1}, G_t$ (va a conocer)

FORMA MATRICIAL:

$$C_t \quad Y_t \quad I_t \quad D_{MT} \quad S_{MT} \quad W_t$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \mu_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_t \\ Y_t \\ I_t \\ D_{MT} \\ S_{MT} \\ W_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix}$$

$A_{6 \times 6}$ $X_{6 \times 1}$ $b_{6 \times 1}$

Es decir:

$$AX = b \quad \text{¿Existe solución?}$$

¿Existe solución única $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

Como $A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow |A_{11}| \neq 0 \quad |A_{22}| \neq 0$

Luego:

i) $\begin{vmatrix} 1 & -\alpha_1 & 0 \\ -\beta & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 \neq \frac{1}{1-\beta}$

ii) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \mu_1 \\ 0 & 1 & -\lambda_1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 \neq$

RESUMEN PRODUCTO

EJM:

	A	I	S	D.F	V.B.P
A	50	200	15	235	500
I	70	350	230	350	1000
S	100	300	110	445	955
V.A	280	150	600		
	500	1000	955		

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

A partir de esta formaci3n:

	A	I	S
A	$\frac{50}{500} = 0,10$	$\frac{200}{1000} = 0,2$	$\frac{15}{955} = 0,02$
I	$\frac{70}{500} = 0,14$	$\frac{350}{1000} = 0,35$	$\frac{230}{955} = 0,24$
S	$\frac{100}{500} = 0,20$	$\frac{300}{1000} = 0,30$	$\frac{110}{955} = 0,12$

$A_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j}$
 A_{ij} : coeficiente t3cnico
 i : indica el sector que vende
 j : al que produce

Teniendo en cuenta los 3 sectores:

	S_1	S_2	S_3	DF	VBP
S_1	X_{11}	X_{12}	X_{13}	Y_1	X_1
	X_{21}	X_{22}	X_{23}	Y_2	X_2
	X_{31}	X_{32}	X_{33}	Y_3	X_3
VBP	VA_1	VA_2	VA_3		
	X_1	X_2	X_3		

Si lo representamos como un sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} X_{11} + X_{12} + X_{13} + Y_1 &= X_1 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} + Y_2 &= X_2 \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} + Y_3 &= X_3 \end{aligned}$$

Este sistema tambi3n lo podemos expresar como:

$$\begin{aligned} A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + A_{13}X_3 + Y_1 &= X_1 \\ A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + A_{23}X_3 + Y_2 &= X_2 \\ A_{31}X_1 + A_{32}X_2 + A_{33}X_3 + Y_3 &= X_3 \end{aligned}$$

Si reemplazamos los resultados del ejemplo resulta:

$$\begin{aligned} 0,10X_1 + 0,20X_2 + 0,02X_3 + Y_1 &= X_1 \\ 0,14X_1 + 0,35X_2 + 0,24X_3 + Y_2 &= X_2 \\ 0,20X_1 + 0,30X_2 + 0,12X_3 + Y_3 &= X_3 \end{aligned}$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} 0,10 & 0,20 & 0,02 \\ 0,14 & 0,35 & 0,24 \\ 0,20 & 0,30 & 0,12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$



Es decir:

$$AX + Y = X$$

$$Y = X - AX \rightarrow Y = (I - A)X$$

$$X = (I - A)^{-1}Y$$

$(I - A)$: matriz de Leontief

$(I - A)^{-1}$: matriz de coeficientes directos e indirectos

A: matriz de coeficientes técnicos

Para los valores de nuestro ejemplo, determinar el VBP de los tres sectores, si la manda final fuera $[700 \ 500 \ 1000]^T$.

Tenemos que:

$$A = \begin{bmatrix} 0,10 & 0,20 & 0,02 \\ 0,14 & 0,35 & 0,24 \\ 0,20 & 0,30 & 0,12 \end{bmatrix}$$

Se tiene que: $X = (I - A)^{-1}Y$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,10 & 0,20 & 0,02 \\ 0,14 & 0,35 & 0,24 \\ 0,20 & 0,30 & 0,12 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 700 \\ 500 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0,90 & -0,20 & -0,02 \\ -0,14 & 0,65 & -0,24 \\ -0,20 & -0,30 & 0,88 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 700 \\ 500 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1,21 & 0,44 & 0,14 \\ 0,41 & 1,91 & 0,53 \\ 0,41 & 0,75 & 1,35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 700 \\ 500 \\ 1000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1207 \\ 1472 \\ 2012 \end{bmatrix}$$

Cuidado con las propiedades de los determinantes; no son operaciones elementales

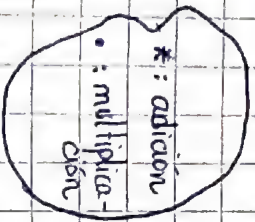
ESPACES

VECTORIALES

CUERPO: CONJUNTO NO VACÍO
EL 0 NO TIENE INVERSO.

CUERPO

$$K \neq \emptyset$$



$a, b \text{ y } c \in K$ cumplen:

i) Cerradura respecto a $(*)$ y (\cdot) :

$$a * b \in K \text{ y } a \cdot b \in K$$

ii) Asociatividad de la $(*)$ y (\cdot) :

$$(*) : (a * b) * c = a * (b * c)$$

$$(\cdot) : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

iii) Conmutatividad:

$$(*) : a * b = b * a$$

$$(\cdot) : a \cdot b = b \cdot a$$

iv) Elemento Neutro:

$$(*) : \exists e \in K / a * e = e * a = a$$

$$(\cdot) : \exists e \in K / a \cdot e = e \cdot a = a$$

v) Elemento Opuesto y de Inversos:

$$(*) : \forall a \in K, \exists b \in K / a * b = b * a = e \text{ (b: elemento opuesto o simétrico)}$$

$$(\cdot) : \forall a \in K - \{e\}, \exists b \in K / a \cdot b = b \cdot a = e \text{ (b: elemento inverso)}$$

0 NO TIENE INVERSO

vi) Distributividad:

$$a \cdot (b * c) = (a \cdot b) * (a \cdot c)$$

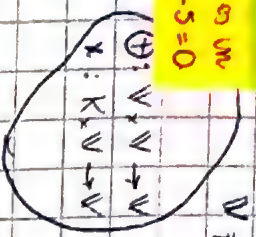
EJEMPLOS

i) \mathbb{N} y \mathbb{Z} no son cuerpos (\exists inversos multiplicativos)

ii) $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ son cuerpos.

Los (Enterales) no es un espacio vectorial: $(3-3)+(2-3) = 5$
 Los \mathbb{N} (naturales) no es un espacio vectorial: $5-5=0$

OPERACIONES CONVENCIONALES
 $(+)$
 $(+)$



los \mathbb{Q} no es espacio vectorial cuando $\forall e \in \mathbb{R}$

- (+): $W \times W \rightarrow W / u, v \in W \rightarrow u \oplus v \in W$
- (\cdot): $K \times W \rightarrow W / \forall \alpha \in K \forall v \in W \rightarrow \alpha \times v \in W$

Además $\forall u, v, w \in W, \gamma, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumple:

- $u \oplus v = v \oplus u$
- $(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$
- $\exists e \in W / u \oplus e = u$
 e : elemento de W o módulo (es único)
 $u + e = e + u = u$
- Para cada $u \exists w \in W / u \oplus w = e$
 w : inverso aditivo
- $\alpha \times (u \oplus v) = \alpha \times u \oplus \alpha \times v$
- $(\alpha + \beta) \times u = \alpha \times u \oplus \beta \times u$
- $(\alpha \times \beta) \times u = \alpha \times (\beta \times u)$
- $1 \times u = u$

Si se cumplen las 8 propiedades W es un espacio vectorial

(W, \oplus, \times) : es un espacio vectorial sobre el cuerpo K .

Los elementos W se llaman vectores
 los elementos K se llaman escalares.

EJEMPLO:

- i) Si $W = \mathbb{R}$ ¿es W un e.v.? Sí
- ii) Si $W = \mathbb{R}^n$ ¿es W un e.v.? Sí

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

$(W, +, \cdot)$: es un e.v.

- (+): $a + b = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$ ✓
- (\cdot): $\lambda(a) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$ ✓

iii) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 5y - 3z = 0\}$ ¿es W un e.v.?

SOL:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3z - 5y \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5y \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3z \\ 0 \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow u = yv + zw$$

Si $u, v, w \in V$ $y \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} u = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \\ v = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} \\ w = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

i) $u + v = v + u$

$$u + v = y_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y_3 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u + v = y_3 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u + v = v + u$$

ii) $(u + v) + w = u + (v + w)$

$$(u + v) + w = y_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(u + v) + w = y_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= y_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (y_2 + y_1) \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (z_2 + z_1) \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= u + (v + w).$$

iii) $\exists e \in V / u + e = u$

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = e_2 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u + e = y_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + e_2 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u + e = (y_1 + e_2) \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (z_1 + e_3) \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = y_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} y_1 + e_2 = y_1 \rightarrow e_2 = 0 \\ z_1 + e_3 = z_1 \rightarrow e_3 = 0 \end{array} \right\} e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

iv) Para cada $u \in V \exists b \in W / u + b = e$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = b_2 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u + b = (y_1 + b_2) \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (z_1 + b_3) \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} y_1 + b_2 = 0 \rightarrow b_2 = -y_1 \\ z_1 + b_3 = 0 \rightarrow b_3 = -z_1 \end{array}$$

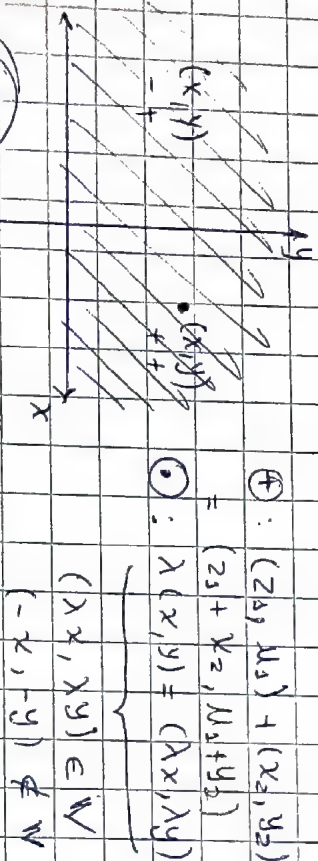
$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = (-y_2) \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-2y_1) \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u+b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e$$

$$\begin{aligned} v) & \alpha \cdot (u+v) = \alpha u + \alpha v \\ v.i) & (\alpha+\beta) \cdot u = \alpha u + \beta u \\ v.ii) & (\alpha \cdot \beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u) \\ v.iii) & 1 \cdot u = u \end{aligned}$$

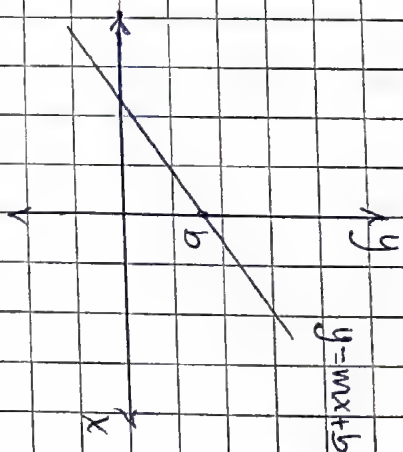
EM:

$$2. Si W = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0 \}, \text{ es } u \in v?$$



Por tanto, W no es espacio vectorial

$$b. Si V = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = mx+b \} \text{ ¿cu } u \in v?$$



$$\begin{aligned} u+e &= u \\ u &= (x,y) \\ e &= (e_1, e_2) \end{aligned}$$

$$(x,y) + (e_1, e_2) = (x,y)$$

$$\begin{cases} x + e_1 = x = 0 \\ y + e_2 = y = 0 \end{cases} \Rightarrow e = (0,0) \notin V$$

W no es espacio vectorial

$$c. - \text{ Superponemos que } W = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \text{ es } u \in v \}$$

$$\begin{aligned} + : & (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2) \\ \circ : & \lambda (x, y) = (\lambda x, \lambda y) \end{aligned}$$

¿Qué forma tiene el elemento neutro de W.

$$\begin{aligned} u &= (x_1, y_1) \\ e &= (e_1, e_2) \end{aligned}$$

$$u+e = (x_1+e_1, y_1+e_2) = (x_1, y_1)$$

$$e = (1, -1)$$

$$\begin{cases} x_1 + e - 1 = x_1 \rightarrow e = 1 \\ y_1 + e_2 + 1 = y_1 \rightarrow e = -1 \end{cases}$$

$$\text{EJM: } W = \{M_{mm}\} \rightarrow (W, +, \cdot)$$

$$\text{EJM: } W = P_3 \rightarrow (W, +, \cdot)$$

B : conjunto de polinomios de grado menor o igual a 3

B

$$P: a+bx+cx^2+dx^3$$

$$a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow (P_3, +, \cdot)$$

$$P_1: 5x^3$$

$$P_2: x+5x$$

$$P_3: -4+3x^2-2x^3$$

$$\text{EJM: } W = F$$

$$F = \{f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\} \quad (V, +, \cdot)$$

Se tiene:

$$V_1 = (1, -2)$$

$$V_2 = 2V_1$$

$$V_2 = (2, -4)$$

$$V_3 = 3V_1$$

$$V_3 = (3, -6)$$

$$a = (2, 3), \quad b = (1, -2), \quad c = (C_1, C_2)$$

$$C = 4a + 3b \rightarrow C = ?$$

$$(C_1, C_2) = 4(2, 3) + 3(1, -2)$$

$$(C_1, C_2) = (11, 6)$$

$$\rightarrow (11, 6) = 4(2, 3) + 3(1, -2)$$

$$C = 4a + 3b$$

(C : combinación lineal de los vectores a y b)

COMBINACION LINEAL

Si W es un espacio vectorial real.

DEF: Sea $x \in W$, es una C.L. de $u_1, u_2, \dots, u_n \in W$ si existen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que:

$$x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$$

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$$

EM: $a = (2, 4)$, $b = (1, -3)$ y $c = (3, 1)$

¿Es el vector a una C.L. de los vectores b y c ?

$a = r \cdot b + t \cdot c, r, t \in \mathbb{R}$

$(2, 4) = r(1, -3) + t(3, 1)$

$$\begin{cases} r + 3t = 2 \\ -3r + t = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} r = -1 \\ t = 1 \end{cases}$$

∴ a es una C.L. de los vectores b y c .

EM: $a = (2, 1, 1)$, $b = (1, 0, 0)$ y $c = (2, 2, 0)$

¿Es el vector a una combinación lineal de los vectores b y c ?

luego: $a = \alpha_1 b + \alpha_2 c$; $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$(2, 1, 1) = \alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(2, 2, 0)$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 2 \\ 0\alpha_1 + 2\alpha_2 = 1 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \Gamma(A) = 2 \\ \Gamma(A_0) = 3 \\ \text{No solución} \end{matrix}$$

∴ a no es combinación lineal b y c

EM: Tenemos $P: x^2 + 1$, $P_2 = x^3 + x - 1$, $P_3 = x + 2$, $P_3 = 1$

$P, P_1, P_2, P_3 \in P_3$

¿Es el vector P una C.L. de P_1, P_2, P_3 ?

$P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3$

$(1, 0, 1, 0) = \alpha_1(-1, 1, 0, 1) + \alpha_2(2, 1, 0, 0) + \alpha_3(1, 0, 0, 0)$

$$\begin{cases} -\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_3 = 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Gamma(A) = 3 > \Gamma(A) \neq \Gamma(A_0) \Rightarrow \text{No solución}$

∴ P no es una C.L. de P_1, P_2 y P_3 .

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL.

Sea $\{V_1, V_2, \dots, V_k\} \subset V$ dicho conjunto es L.D.
 \Leftrightarrow existen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_k V_k = 0 \text{ y no trivial, es}$$

decir que al menos un coeficiente real es distinto de cero.
 Pero si la combinación lineal es nula y trivial el conjunto de vectores es L.I.

\therefore si tenemos $\{V_1, V_2, V_3\} \subset \mathbb{R}^3$, ¿es L.I. o L.D.?

$$V_1 = (0, 1, -1); V_2 = (1, 0, 1); V_3 = (2, -2, 2)$$

SOL:

$$\text{Sea: } \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \\ \text{I.L.} \end{array} \right\}$$

$$\alpha_1 (0, 1, -1) + \alpha_2 (1, 0, 1) + \alpha_3 (2, -2, 2) = (0, 0, 0)$$

$$0\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$$

$$1\alpha_1 + 0\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0$$

$$-1\alpha_1 + 1\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$$

} SEL

Luego:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

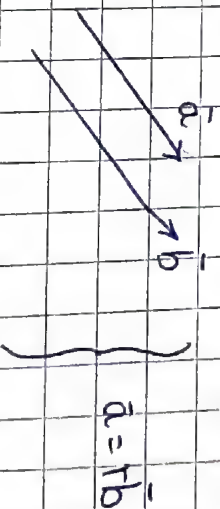
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Gamma(A) = 3 \rightarrow \exists$ solución única (la trivial)

$\therefore \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ son L.I.

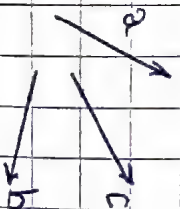
Obs:

i) En \mathbb{R}^2 : si los vectores son paralelos son L.D.



$$c = r\bar{b}$$

ii) En \mathbb{R}^3 : tres vectores son L.D. \Leftrightarrow son coplanares o proporcionales.



$$c = r\bar{a} + s\bar{b}$$

iii) Si tenemos $\{V_1, V_2, \dots, V_i, \dots, V_k\}$

Si $V_i = 0 \Rightarrow$ dicho conjunto es L.D.

iv) En \mathbb{R}^n , si $a = r \cdot b \rightarrow \{a, b\}$ es L.D.

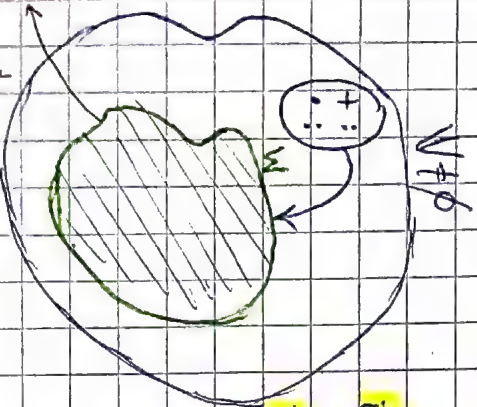
PROPIEDADES:

$$\{V_1, V_2, \dots, V_i, V_k\} \in \mathbb{R}$$

$$V_i = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_k V_k$$

$\rightarrow \{V_1, V_2, \dots, V_i, \dots, V_k\}$ es L.D.

SUBESPACIO VECTORIAL



i) W : es subconjunto de V

ii) W : es un espacio vectorial

W : es un espacio vectorial de V

Una recta que pasa por el origen es un espacio vectorial, si no pasa por el origen no es un espacio vectorial.

Es W :

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

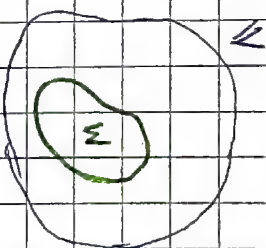
$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = mx, m \in \mathbb{R}\}$$

Tenemos:

i) W es un subconjunto de V

ii) W es un espacio vectorial

$\therefore W$ es un subespacio vectorial de V



¿Cómo saber si W es subespacio de W ?

Si sabemos que: $W \neq \emptyset$ y $W \subseteq V$.
¿Cómo determinar si W es un subespacio de W ?

Es suficiente averiguar si las operaciones de adición y producto por un escalar están bien definidas; lo que significa que si tenemos $u, v \in W$ y $\alpha \in K$.

$$\Rightarrow (\alpha \cdot u + v) \in W.$$

ESM:

2) $R_{xz} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y=0 \}$ ¿Es un

subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 ?

Sol:

Se tiene que los elementos de R_{xz} son de la forma:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Es decir

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in R_{xz} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sean:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \in R_{xz} \rightarrow u = u_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in R_{xz} \rightarrow v = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + v_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Debe cumplirse que: $u + \alpha v \in R_{xz}$

$$u + \alpha v = u_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha \left(v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + v_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$u + \alpha v = u_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha v_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u + \alpha v = (u_1 + \alpha v_1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (u_3 + \alpha v_3) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow u + \alpha v \in R_{xz}$$

$\therefore R_{xz}$ es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^3

Todo subespacio vectorial tiene un vector neutro aditivo

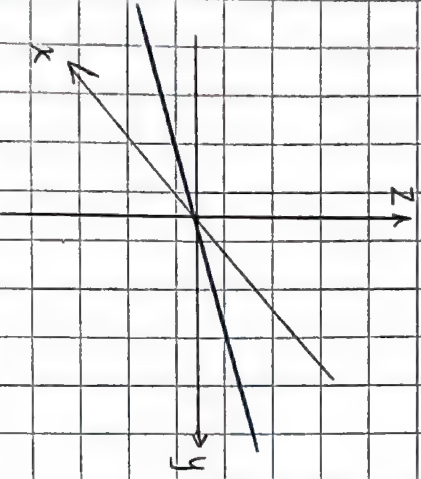
Todo espacio vectorial tiene al menos dos subespacios vectoriales $W = \{0\}$ y $W = \mathbb{R}^3$; llamados impropio y a los otros subespacios vectoriales se llaman propio.

(iii) Definiciones:

$Ax = 0$, $A \in M_{m \times n}$ (coeficientes de A pertenecen a K)

El conjunto de soluciones es un subespacio vectorial de K^n .

(iv) Las soluciones de un sistema homogéneo en \mathbb{R} : $Ax = 0$, es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n .



x :
espacio vectorial
de \mathbb{R}^3

Un plano que pasa por el origen de coordenadas de \mathbb{R}^3 es también un subespacio vectorial.

Ejercicios:

a) $(1, -1, 4, 1)$; $(1, 1, 2, 0)$; $(3, 0, 2, 1)$

¿son linealmente independientes?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Gamma(A) = 3$ linealmente independientes (v)

$\Gamma(A) < 3$ linealmente dependiente

b) $(1, 1, 1, 0)$; $(0, 1, 0, 1)$; $(0, -1, -1, 0)$; $(0, 1, 2, 3)$; $(2, 1, 0, 1)$

¿son linealmente independientes?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Gamma(A) = 4$ linealmente independiente (v)

$\Gamma(A) < 4$ linealmente dependiente

luego:

ESPACIO GENERADO

$V \neq \emptyset$

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ V_1, V_2 \\ V_1, V_2, V_3 \end{Bmatrix}$$

En general:

$V \neq \emptyset$ $\langle V_1, V_2, \dots, V_k \rangle = \{ r \in V \mid$

$$r = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_k V_k \text{ con } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \}$$

$$\{V_1, V_2, V_3, \dots, V_k\}$$

combinación lineal de A_1, A_2, A_3

GEN $\{V_1, V_2, \dots, V_k\} = \{ r \in V \mid$

$$r = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_k V_k;$$

$$\alpha_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, k}$$

EJM: La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ pertenece al espacio

generado por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

SOL:

$$\langle A_1, A_2, A_3 \rangle = \{ M \in M_{2,2} \mid M = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 \}$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$$

Entonces:

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = A$$

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 (1, -1, -2, 0) + \alpha_2 (-1, 1, 3, 0) + \alpha_3 (4, 2, 0, -4) = (1, 0, 0, -2)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 + 4\alpha_3 &= 1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ -2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 0\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 - 4\alpha_3 &= -2 \end{aligned} \right\} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}}_A \quad A_0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} r(A) &= 3 \\ r(A_0) &= 4 \end{aligned}$$

⇒ No solución

$$\underbrace{E_A}_{E_{A_0}}$$

$$\therefore A \notin \langle A_1, A_2, A_3 \rangle$$

BASE Y DIMENSION

$$B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

existen tantas bases
como contadores
linealmente independ.
siendo exist.

$$B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

n vectores

EJM:

$$\rightarrow \dim(\mathbb{R}^3) = 3$$

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

i) B : linealmente
independiente

$$ii) \langle B \rangle = V$$

B : base de V

$$\dim(V) = n$$

$$(x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z)$$

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$

$$\vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k}$$

$$B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} \text{ l.i.}$$

$$\langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle = \mathbb{R}^3 \Rightarrow \therefore \dim(\mathbb{R}^3) = 3$$

$$\rightarrow \dim(M_{2 \times 2}) = 4$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1$$

$$M_2$$

$$M_3$$

$$M_4$$

$$\{M_1, M_2, M_3, M_4\} : \text{base de } M_{2 \times 2}$$

$$\langle M_1, M_2, M_3, M_4 \rangle = M_{2 \times 2} \Rightarrow \therefore \dim(M_{2 \times 2}) = 4$$

$$\rightarrow \dim(P_4) = 5$$

P_4

$$P: a+bx+cx^2 + dx^3+ex^4$$

$$a,b,c,d,e \in \mathbb{R}$$

$$p_1: -2 \rightarrow (-2, 0, 0, 0, 0)$$

$$p_2: 3x \rightarrow (0, 3, 0, 0, 0)$$

$$p_3: -5x^2 \rightarrow (0, 0, -5, 0, 0)$$

$$p_4: 7x^3 \rightarrow (0, 0, 0, 7, 0)$$

$$p_5: -4x^4 \rightarrow (0, 0, 0, 0, -4)$$

$$\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\} \text{ L.I. } \left. \vphantom{\begin{matrix} p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 \end{matrix}} \right\} \text{ base de } P_4$$

$$\langle p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 \rangle = P_4$$

$$\therefore \dim(P_4) = 5$$

SISTEMA GERADOR

$W \neq \emptyset$

$$S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$$

$$L(S) = \langle a, b \rangle$$

$$L(S) = V$$

$$\langle S \rangle = W$$

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle = W$$

S: sistema de geradores de W.

$$L(S) = V \Rightarrow \forall v \in W \Rightarrow v = \langle v_1, v_2, v_3, \dots, v_k \rangle$$

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$$

$$\alpha_i \in \mathbb{R} / i = \overline{1, n}$$

$$\rightarrow d^0 S = \{a, b\} \quad L(S) = \mathbb{R}^2 \quad ? \quad a = (-2, -3); b = (3, -2)$$

$$\text{Platform gerent } (1) \rightarrow (1)$$

$$\langle a, b \rangle = L(S) = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$\alpha_1 a + \alpha_2 b = x \in \mathbb{R}^2$$

$$\alpha_1 (-2, -3) + \alpha_2 (3, -2) = (x, y)$$

$$\begin{cases} -2\alpha_1 + 3\alpha_2 = x \\ -3\alpha_1 - 2\alpha_2 = y \end{cases} \quad \alpha_2 = \frac{3x - 2y}{13}$$

$$\alpha_1 = \frac{-2y - 36x}{13}$$

Logo:

$$(x, y) = \left(\frac{3x - 2y}{13} \right) b + \left(\frac{-2y - 36x}{13} \right) a$$

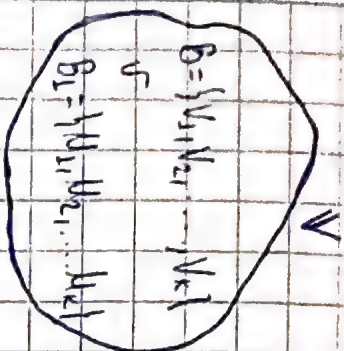
$$\therefore L(S) = \mathbb{R}^2$$

combinación lineal de a y b.

$L(S)$: espacio generado de a y b.

OBS:

i)



$$v \in W$$

$$i) v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$$

$$ii) v = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_k u_k$$

CONCLUSIONES:

a) En W existen a lo más n vectores L.I.

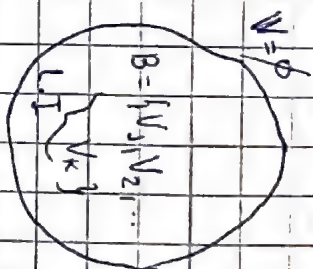
b) Trabajaremos en lo sucesivo con espacios vectoriales finitos.

PROPIEDADES

i) U : subespacio vectorial de W

$$\rightarrow \dim(U) \leq \dim(W)$$

$$ii) \dim(U) = \dim(W) \Leftrightarrow U = W$$



$$A = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \sqrt{A} = K$$

$$\text{Si } \dim(W) = 0 \Rightarrow V = \{0\}$$

$$B = \{ \} = \emptyset \Rightarrow L(B) = \{0\}$$

BASES CANÓNICAS O STANDARDS

Sea $W = \mathbb{R}^n$; la base canónica está dada por:

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ donde:

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$$

$$e_2 = (0, 1, \dots, 0)$$

$$\vdots$$

$$e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

donde e_i nos indican las direcciones positivas de los ejes coordenados de \mathbb{R}^n .

EJM: $W = \mathbb{R}^3$

$$B = \{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \}$$

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

EJM: Una base de \mathbb{R}^3 , que no es canónica.

$$B = \{V_1, V_2, V_3\}$$

$$V_1 = (2, 2, 2), V_2 = (0, 1, -1), V_3 = (0, 0, 5)$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \text{rank}(A) = 3 \quad \text{L.I.}$$

CAMBIO DE BASE:

$W \neq \emptyset$

$$B = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$$

Sea $x \in W$
 $B = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ es una de las bases de W

$$x = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_k V_k$$

$$[x]_B =$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}$$

EJM: Expresar $(4, -3)$ en la base $B = \{V_1, V_2\}$

$$V_1 = (3, 1), V_2 = (-3, 3)$$

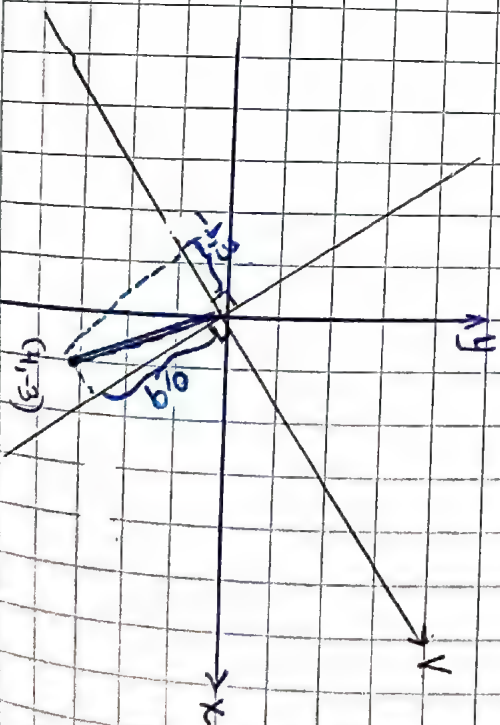
$$(4, -3) = \alpha_1 (3, 1) + \alpha_2 (-3, 3)$$

$$[(4, -3)]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

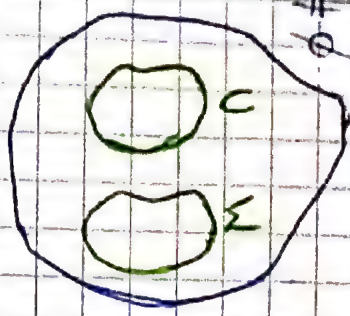
$$\rightarrow \begin{cases} 3\alpha_1 - \alpha_2 = 4 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 = -3 \end{cases} \quad \alpha_1 = 0,9 \quad \alpha_2 = -1,3$$

$$[(4, -3)]_B = \begin{bmatrix} 0,9 \\ -1,3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 9/10 \\ -13/10 \end{bmatrix}$$



INTERSECCIÓN DE SUBESPACIOS VECTORIALES



U, W : subespacios vectoriales de V .

ejm: Tenemos U, W subespacios de \mathbb{R}^3

$U = \{ (x, y, z) \}$

$W = \{ \}$

Lineal:

$U \cap W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0 \ ; \ 3x - y + 2z = 0 \}$

Resolvemos:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$T(A) = 2 \Rightarrow$ Expresamos la relación en función de $(3+2=1)$ parámetro.

$$\begin{matrix} x - y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t/2 \\ -t/2 \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow (x, y, z) = T(-1, -1, 2), \quad t \in \mathbb{R}$

$\therefore U \cap W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underline{T(-1, -1, 2)}, t \in \mathbb{R} \}$

una recta que pasa por el origen.

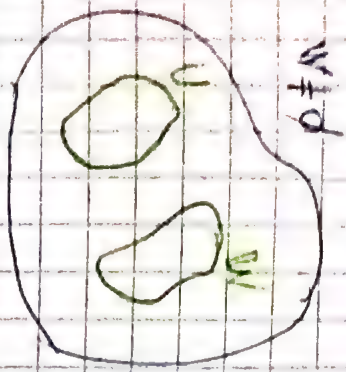
OBS:

i) $P \cap Q \cap R \cap S \dots = ((P \cap Q) \cap R) \cap S \dots$

ii) $U \cap W$ es el mayor subespacio vectorial contenido de U contenido en W .

iii) La unión de subespacios no necesariamente es un subespacio vectorial.

SUMA DE SUBESPACIOS VECTORIALES



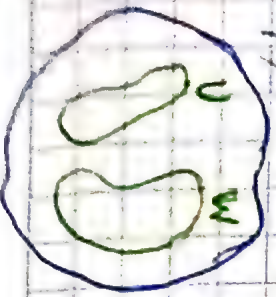
$V \neq \emptyset$

$$U + W = \left\{ u + w \mid \begin{array}{l} u \in U \\ w \in W \end{array} \right\}$$

Forma de suma:

i) $U + W = L(U \cup W)$

ii) $U + W$ es el menor subespacio vectorial que contiene a U y a W . También a la unión $(U \cup W)$



$V \neq \emptyset$

Teorema: Si U y W son dos subespacios de V entonces su suma también lo es.

Sabemos que:

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

Sean $a + b \in U + W$

$$a = u_1 + w_1, u_1 \in U, w_1 \in W$$

$$b = u_2 + w_2, u_2 \in U, w_2 \in W$$

Siendo $\alpha \in K$ tenemos:

$$\alpha a + b = \underbrace{\alpha(u_1 + w_1)}_{\in U} + \underbrace{(u_2 + w_2)}_{\in W}$$

$$b + \alpha a = (\alpha(u_1 + u_2)) + (\alpha(w_1 + w_2))$$

$$\therefore \alpha a + b = \underbrace{(\alpha u_1 + u_2)}_{\in U} + \underbrace{(\alpha w_1 + w_2)}_{\in W}$$

$$\alpha a + b = u' + w'$$

$\therefore U + W$ es un subespacio de V

Propiedades:

i) $U + W = W + U$

iv) $\dim(U \oplus W) = \dim(U) + \dim(W)$

ii) $U + U = U$

v) $W = U \oplus W \Rightarrow \dim(W) = \dim(U) + \dim(U)$

iii) $U \subset (U + W)$

iv) $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

SUMA DIRECTA

$$U \oplus W = U + W \text{ con la condición que } U \cap W = \{0\}$$

DEF: $V \neq \emptyset$

DEF: $U \cap W \subset V$



$$U \oplus W = V$$

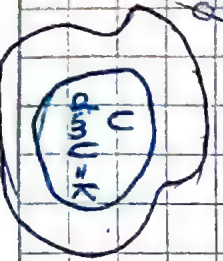
OBS:

i) $V = U + W$ y $U \cap W = \{0\}$

ii) $v \in V$, $v = u + w$, $u \in U$ y $w \in W$
 $\Rightarrow u + w = v$

iii) U : subespacio vectorial de dimensión K .

$V \neq \emptyset$



\exists al menos un subespacio complementario W de U

$$\dim(W) = n - K$$

EJEMP:

$$R_{xy} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \}$$

$$R_{xy} = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle$$

$$L_z = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0 \}$$

$$L_z = \langle (0, 0, 1) \rangle$$

$$R_{xy} \oplus L_z = ? , R_{xy} \cap L_z = ?$$

$$\Rightarrow \partial \in R_{xy} \cap L_z \left\{ \begin{array}{l} \partial \in R_{xy} \Rightarrow \partial = (\partial_1, \partial_2, 0) \\ \partial \in L_z \Rightarrow \partial = (0, 0, \partial_3) \end{array} \right.$$

$$\text{Debe cumplirse: } (\partial_1, \partial_2, 0) = (0, 0, \partial_3)$$

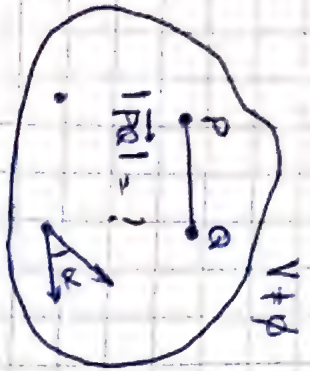
$$\Rightarrow (\partial_1 = \partial_2 = \partial_3 = 0)$$

$$\partial = (0, 0, 0) \Rightarrow R_{xy} \cap L_z = \{ (0, 0, 0) \}$$

luego:

$$R_{xy} \oplus L_z = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle = \mathbb{R}^3$$

ESPACIO VECTORIAL EUCLIDEO



DEF: $V = \mathbb{R}^n \rightarrow K$ ($K = \mathbb{R}$ or $K = \mathbb{C}$)

El producto interno se define:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle a, b \rangle = \langle (a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \rangle$$

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

$$\langle a, b \rangle = a \cdot b = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

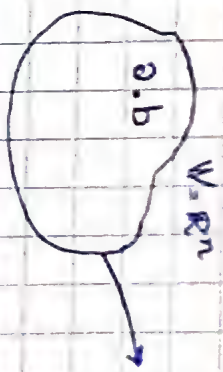
Propiedades:

i) $\langle 0, u \rangle = 0$

ii) $\langle u, v+w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$

$\langle u, kv \rangle = k \langle u, v \rangle, k \in K$

Espacio Vectorial Euclideo \mathbb{R}^n



Espacio Vectorial Euclideo \mathbb{R}^n

ESPACIOS AFINES

DEF: $E \neq \emptyset \rightarrow E$ es un espacio afín asociado al espacio vectorial V , si \exists una aplicación:

$$f: E \times E \rightarrow V / a \text{ cada par de puntos } (p, a) \text{ de } E$$

le corresponde un único vector de V tal que:

$$V = \overrightarrow{pa} : [f(p, a)] = v = \overrightarrow{pa}$$

tal que se verifica:

i) $p \in E$ y $v \in V$

$$f(p, a) = v = \overrightarrow{pa}$$

ii) $\forall p, a$ y $R \in E$

$$\overrightarrow{pa} + \overrightarrow{ar} = \overrightarrow{pr}$$



NORMA: $|a| = (a \cdot a)^{1/2}$

$$|a|^2 = a \cdot a$$

$$\rightarrow |a| \geq 0$$

$$|a| = 0 \rightarrow a = 0$$

$$|ta| = |t| |a|, t \in \mathbb{R}$$

$$\langle a, a \rangle = a \cdot a = |a|^2$$

$$|a+b|^2 \leq |a|^2 + |b|^2 \text{ (DESIGUALDAD)}$$

$$|a \pm b|^2 = |a|^2 + |b|^2 \pm 2a \cdot b$$

OBS:

i) A los elementos de E los llamaremos puntos, mientras que a los de V vectores.

ii) Si $P \in E$ y $v \in V \Rightarrow \exists$ un único punto $Q \in E / v = \overrightarrow{PQ} \Rightarrow Q - P = v = \overrightarrow{PQ}$

Conclusión: El espacio afín es un conjunto de puntos al cual se le asocia un espacio vectorial V por medio de una aplicación f .

EM: $E = \mathbb{R}^n$ es un espacio afín asociado al propio espacio vectorial $V = \mathbb{R}^n$.

$E = \mathbb{R}^n$



PROPIEDADES:

1.. $\overrightarrow{PQ} = 0 \Leftrightarrow \vec{P} = \vec{Q}$

2.. $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$

3.. $\overrightarrow{PQ} = Q - P \Rightarrow Q = P + \overrightarrow{PQ}$

4.. $\overrightarrow{PQ} = \vec{RS} \Leftrightarrow \overrightarrow{PR} = \vec{QS}$

$Q - P = S - R \Rightarrow R - P = S - Q$

DESIGUALDAD DE CAUCHY - SCHWARZ

Sean $a, b \in \mathbb{R}$

$(a \cdot b)^2 \leq (a \cdot a)(b \cdot b)$

Prueba:

Veamos si los vectores a y b son o no nulos.

Hacemos: $c = xa - yb$

$\begin{cases} x = b \cdot b \\ y = a \cdot b \end{cases}$

$\Rightarrow c \cdot c \geq 0$

$(xa - yb) \cdot (xa - yb) \geq 0$

$xa \cdot (xa - yb) - yb \cdot (xa - yb) \geq 0$

$x^2(a \cdot a) - xy(a \cdot b) - xy(b \cdot a) + y^2(b \cdot b) \geq 0$

$(b \cdot b)^2(a \cdot a) - 2(b \cdot b)(a \cdot b)(a \cdot b) + (a \cdot b)^2(b \cdot b) \geq 0$

$(a \cdot a)(b \cdot b) - 2(a \cdot b)^2 + (a \cdot b)^2 \geq 0$

$(a \cdot a)(b \cdot b) - (a \cdot b)^2 \geq 0$

$(a \cdot a)(b \cdot b) \geq (a \cdot b)^2$

\therefore

$(a \cdot b)^2 \leq (a \cdot a)(b \cdot b)$

IMPORTANTE: $a \cdot a = |a|^2$

De donde tenemos: $|a \cdot b|^2 \leq |a|^2 |b|^2$
 $|a \cdot b| \leq |a| |b|$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA:

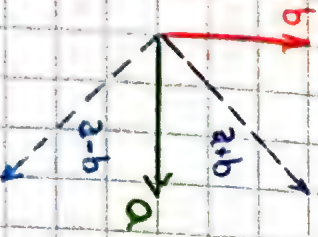


ORTOGONALIDAD DE VECTORES

DEF: Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$, decimos que los vectores a y b son ortogonales y los denotaremos $a \perp b$, si:

$$|a+b|^2 = |a-b|^2$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA:



Tenemos: $|a+b|^2 = |a-b|^2$

$$|a+b|^2 = |a-b|^2$$

$$|a|^2 + |b|^2 + 2a \cdot b = |a|^2 + |b|^2 - 2a \cdot b$$

$$-2a \cdot b$$

$$4a \cdot b = 0$$

$$\rightarrow a \cdot b = 0$$

$$\therefore \boxed{a \perp b \Rightarrow a \cdot b = 0}$$

VECTOR UNITARIO: (u) :

$$|u| = 1$$

$$e_{JM}: \quad p = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)$$

$$|a| = \sqrt{\left(\frac{3}{5} \right)^2 + \left(\frac{4}{5} \right)^2} = 1 \rightarrow \boxed{a = u}$$

e_{JM} :

$$i = (1, 0, 0) \quad ; \quad j = (0, 1, 0) \quad ; \quad k = (0, 0, 1)$$

e_{JM}

$$e_1 = (1, 0, 0, 0 \dots 0)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, 0 \dots 0)$$

:

$$e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

$$|e_i| = 1 \quad ; \quad \forall i = \overline{1, n}$$

$$(e_i) \cdot (e_j) = 0, \quad \forall i \neq j$$

Además, si $a \in \mathbb{R}^n$:

$$\boxed{u = \frac{a}{|a|} \Rightarrow a = u |a|}$$

$$u \cdot v = v \cdot u$$

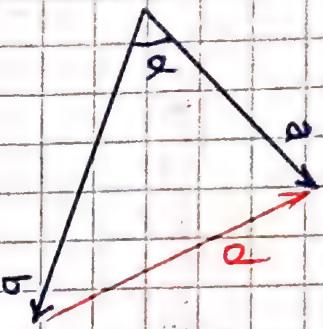
$$u \cdot (v+w) = u \cdot v + u \cdot w$$

$$c(u \cdot v) = (cu) \cdot v = u \cdot (cv)$$

ej: $a = (2, -1, 3) \rightarrow |a| = \sqrt{14}$

$\mu = \frac{a}{|a|} \rightarrow \mu = \frac{1}{\sqrt{14}} (2, -1, 3)$

ÁNGULO ENTRE VECTORES



$$\cos \alpha = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}$$

$$\alpha \in [0, \pi]$$

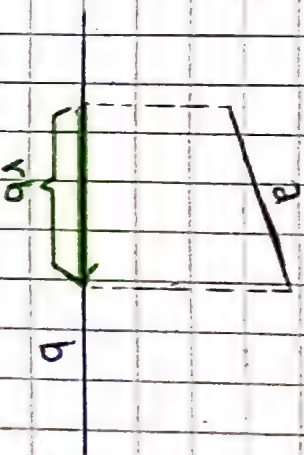
Sabemos que:

$$|d| = |b - a|$$

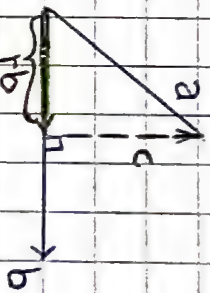
$$\left. \begin{aligned} |b - a|^2 &= |a|^2 + |b|^2 - 2a \cdot b \\ |b - a|^2 &= |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos \alpha \end{aligned} \right\} a \cdot b = |a||b|\cos \alpha$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$$

PROYECCIÓN DE UN VECTOR EN LA DIRECCIÓN DE OTRO



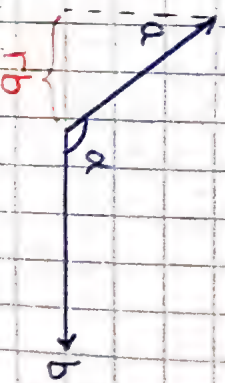
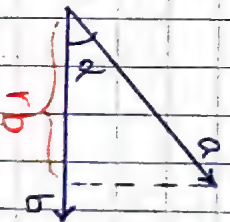
$$\boxed{\text{Proy}_b a = r_b}$$



$$\begin{aligned} b &\perp c \\ a &= r_b + c \\ a \cdot b &= r_b \cdot b + \underbrace{c \cdot b}_0 \\ T &= \frac{a \cdot b}{|b|^2} \end{aligned}$$

luego:

$$\boxed{\text{Proy}_b a = \left(\frac{a \cdot b}{|b|} \right) \left(\frac{b}{|b|} \right)} ; \boxed{\text{Comp}_b a = \frac{a \cdot b}{|b|}}$$



PROPIEDADES:

i) $\text{Proy}_b(a+c) = \text{proy}_b a + \text{Proy}_b c$

ii) $\text{Proy}_b(r a) = r \text{Proy}_b a$; $r \in \mathbb{R}$

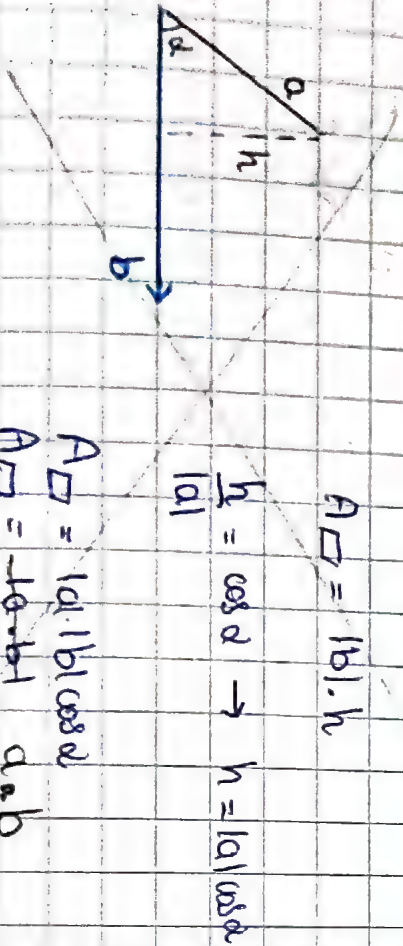
iii) $\text{Proy}_b(a) = \text{Proy}_b a$; $r \in \mathbb{R} - \{0\}$

1a) $\text{Comp}_b(a+c) = \text{comp}_b a + \text{comp}_b c$

2a) $\text{Comp}_b a = r \text{comp}_b a$; $r \in \mathbb{R}$

3) $\text{Comp}_b a = \frac{1}{|r|} \cdot \text{comp}_b a$; $r \in \mathbb{R} - \{0\}$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL PRODUCTO ESCALAR



PRODUCTO VECTORIAL

DEF: Sean $a, b \in \mathbb{R}^3$

$a \times b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$(a, b) \rightarrow c = a \times b$

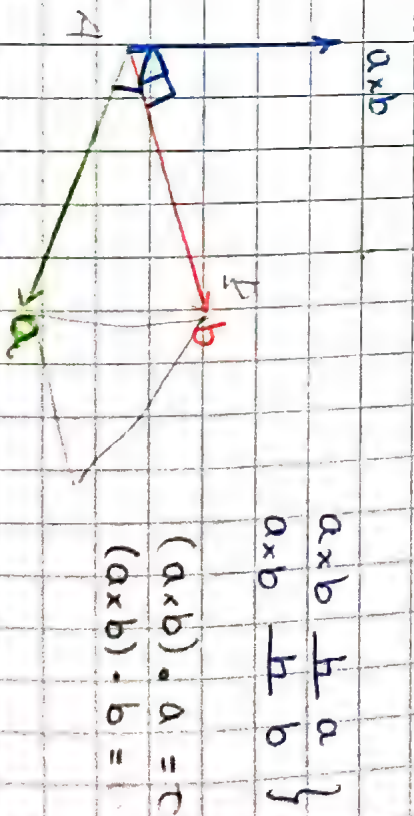
$a \times b = (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3)$

$a \times b = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

$a \times b = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$

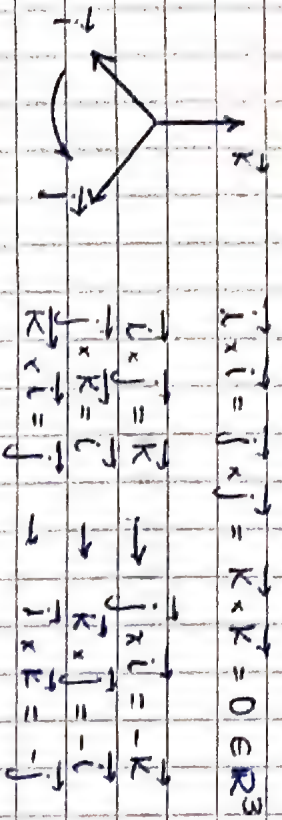
En forma equivalente:

$a \times b = (a_2 b_3 - b_2 a_3 ; b_1 a_3 - a_1 b_3 ; a_1 b_2 - b_1 a_2)$



Si $A \propto h \cdot B \rightarrow |A \times B| = |A| \cdot |B|$

Si tenemos:



PROPIEDADES:

i) $a \times b = -b \times a$

ii) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

iii) $(r a) \times b = (a) \times (r b) = r(a \times b), r \in \mathbb{R}$

iv) $a \times a = \vec{0}$

v) $a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$

$(a \times b) \times c = (c \cdot a)b - (c \cdot b)a$

vi) $|a \times b|^2 = |a|^2 |b|^2 - (a \cdot b)^2$

$|a \times b|^2 = (a \times b) \cdot (a \times b)$

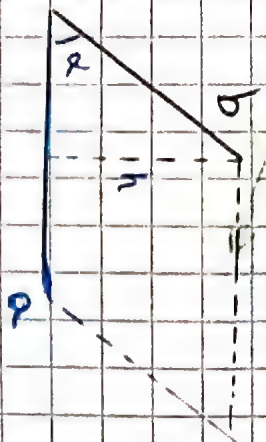
$= a \cdot (b \times (a \times b))$

$= a \cdot [(b \cdot b)a - (a \cdot b)b]$

$= |b|^2 (a \cdot a) - (a \cdot b)(a \cdot b)$

$|a \times b|^2 = |b|^2 |a|^2 - (a \cdot b)^2$

INTERPRETACIÓN DEL PRODUCTO VECTORIAL



$A_{\square} = |a| \cdot h$
 $h = |b| \sin \theta$

$A_{\square} = |a| \cdot |b| \sin \theta$
 $A_{\square} = |a \times b|$

$|a \times b| = |a| |b| \sin \theta$

TRIPLE PRODUCT ESCALAR

DEF: Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ el triple producto escalar se denota $[abc]$ y se define como:

$[abc] = a \cdot (b \times c)$

$$\begin{cases} a = (a_1, a_2, a_3) \\ b = (b_1, b_2, b_3) \\ c = (c_1, c_2, c_3) \end{cases}$$

$[abc] =$

a_1	a_2	a_3
b_1	b_2	b_3
c_1	c_2	c_3

Para que $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ pertenecen al mismo plano.

$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$

Da valores no nulos (a, b, c)

ii: $a \times b = 0$

$\vec{a} \parallel \vec{b}$

colineales: pertenecen a una

La misma recta o son paralelos a otra recta

ii) $[abc] = a \cdot (b \times c) = c \cdot (a \times b) = b \cdot (c \times a)$

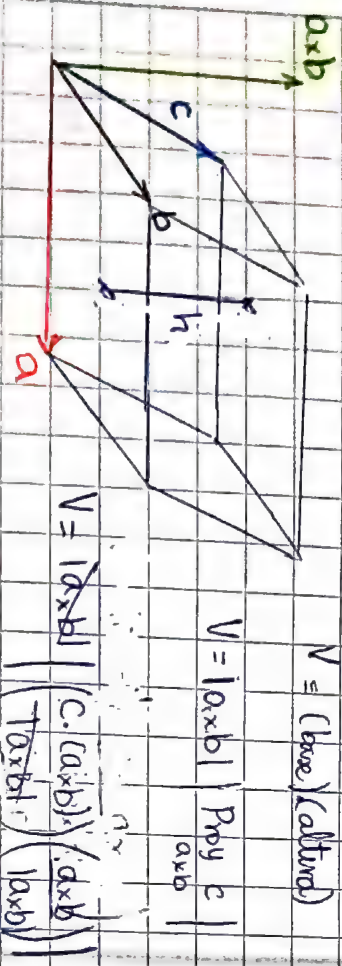
iii) $[abc] = a \cdot (b \times c) = \begin{vmatrix} a & (b \times c) \\ 1 & b \times c \end{vmatrix}$

$[abc] = \begin{pmatrix} \text{Com } a \end{pmatrix} |b \times c|$

Obs: Si $[abc] = 0 \rightarrow \{a, b, c\}$ son L.D

INTERPRETACIÓN DEL TRIPLE PRODUCTO ESCALAR

Si:



$V = (b \times c) \cdot (a \text{ altura})$

$V = |a \times b| \cdot \text{Proy } c$

$V = |a \times b| \cdot \left| \frac{c \cdot (a \times b)}{|a \times b|} \right|$

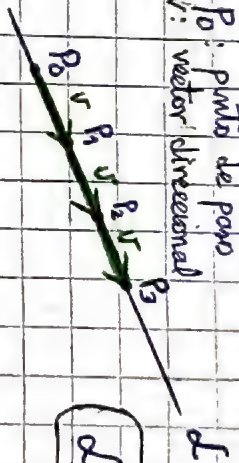
$V = |c \cdot (a \times b)|$

$V = |[abc]|$

$V = \frac{|u \cdot v \cdot w|}{6}$

LA RECTA EN \mathbb{R}^2

P_0 : punto de paso
 v : vector direccional



$d = \{ P / P = P_0 + t v, t \in \mathbb{R} \}$

ecuación vectorial

Si hacemos que:

$P_0 = (x_0, y_0), v = (a_1, a_2); P = (x, y) \Rightarrow P = P_0 + t v$

$\rightarrow (x, y) = (x_0, y_0) + t(a_1, a_2)$

$(x - x_0 - t a_1) i + (y - y_0 - t a_2) j = 0$

Entonces

$\left. \begin{matrix} x = x_0 + t a_1 \\ y = y_0 + t a_2 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{ecuaciones} \\ \text{paramétricas de } d. \end{matrix}$

Asimismo:

$\left. \begin{matrix} x - x_0 = \frac{y - y_0}{a_2} a_1 \\ a_1 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{ecuación simétrica} \\ \text{de } d. \end{matrix}$

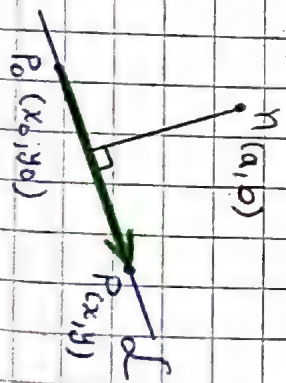
También:

$\rightarrow (\vec{P_0 P}) \cdot n = 0$

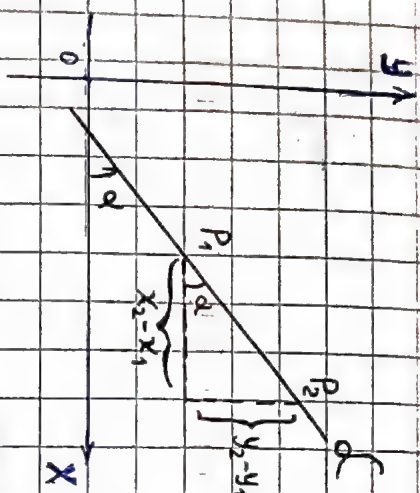
$[(x, y) - (x_0, y_0)] \cdot (a, b) = 0$

$a x + b y = c$

ecuación general de d



PENDIENTE DE UNA RECTA



α : ángulo de inclinación de ℓ
 $\tan \alpha = m$
 m : pendiente de ℓ

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\Rightarrow y = mx + b$$

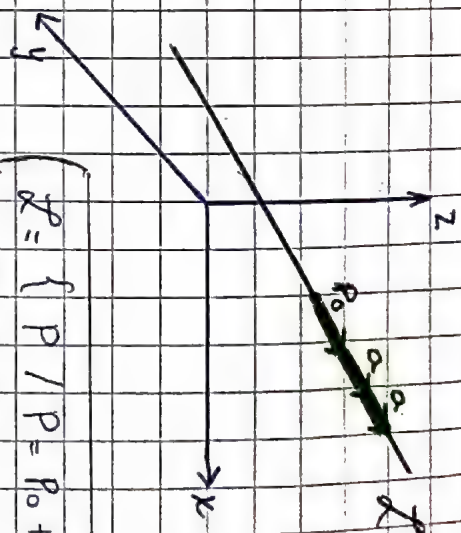
RECTAS EN \mathbb{R}^3

P_0 : punto de paso

a : vector direccional

P : punto que pertenece a la recta

VECTOR DIRECCIONAL, PARA Hallar la RECTA PASA POR PUNTO DE UNA RECTA.



$$\mathcal{L} = \{ P \mid P = P_0 + ta, t \in \mathbb{R} \}$$

De donde tenemos:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}$$

Ecuaciones paramétricas de \mathcal{L} .

$$\text{ii) } \begin{cases} \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Ecuación simétrica de } \mathcal{L} \end{array} \right\}$$

POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

Sean las rectas:

$$r_1 = \{ P \mid P = P_0 + ta, t \in \mathbb{R} \}$$

$$r_2 = \{ P \mid P = P_0 + sb, s \in \mathbb{R} \}$$

$$(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot (\overline{a} \times \overline{b})$$

$$i) \mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow$$

$$a \parallel b$$

$$a \neq b \vee$$

$$a \times b = 0$$

vector \downarrow

$$ii) \mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow$$

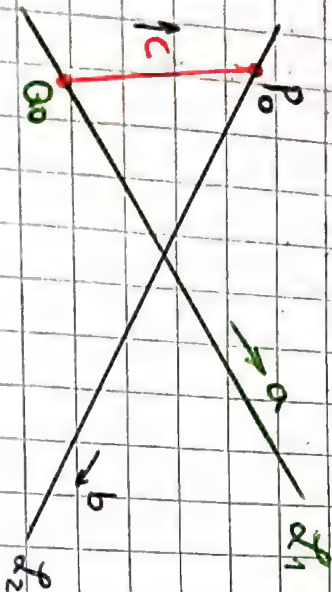
$$a \perp b$$

$$a \cdot b = 0$$

RECTAS QUE SE INTERSECTAN

\mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 se intersectan

$$\Leftrightarrow [abc] = 0, \text{ siendo } c = \overrightarrow{P_0 Q_0}$$



Pero si: $[abc] \neq 0 \Rightarrow \mathcal{L}_1$ y \mathcal{L}_2 se cruzan.

ÁNGULO ENTRE RECTAS

Tenemos:

$$\mathcal{L}_1 = \{ P \mid P = P_0 + t a, t \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathcal{L}_2 = \{ P \mid P = Q_0 + s b, s \in \mathbb{R} \}$$

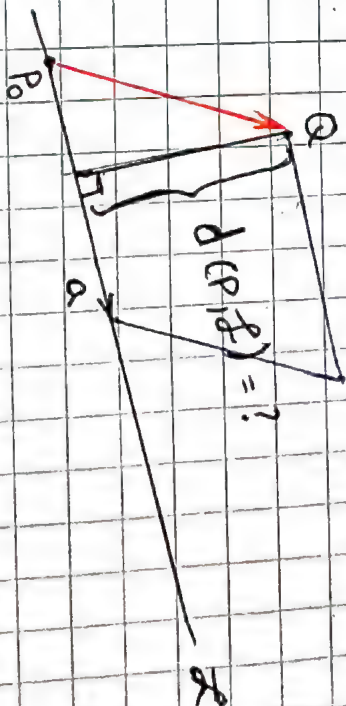
$$\angle(L_1, L_2) = \angle(a, b) = \theta$$

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|}; \quad \theta \in [0, \pi]$$

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Tenemos:

$$\mathcal{L} = \{ P \mid P = P_0 + t a, t \in \mathbb{R} \} \text{ y } Q \in \mathbb{R}^3$$



Se cumple:

$$|a| d(Q, \mathcal{L}) = |P_0 Q \times a|$$

$$\therefore d(Q, \mathcal{L}) = \frac{|P_0 Q \times a|}{|a|}$$

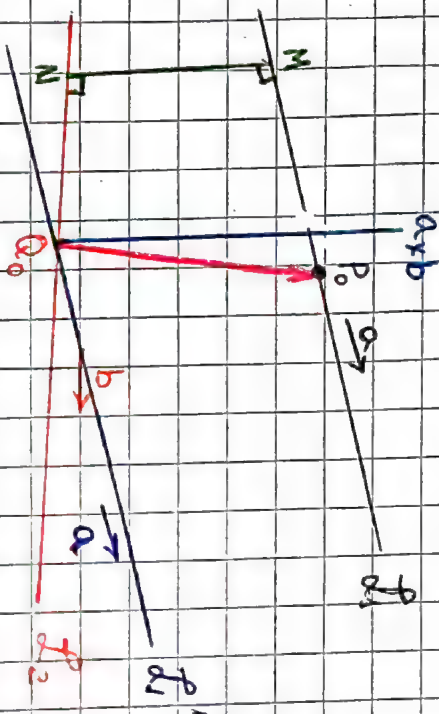
DISTANCIA ENTRE RECTAS $d = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

$L_1: Ax + By + C_1 = 0, L_2: Ax + By + C_2 = 0$

PARAMETRIZAS :
DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN

Tenemos :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \{ P \mid P = P_0 + ta; t \in \mathbb{R} \} & \text{RECTAS QUE SE CRUZAN} \\ \mathcal{L}_2 &= \{ P \mid P = Q_0 + sb; s \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$



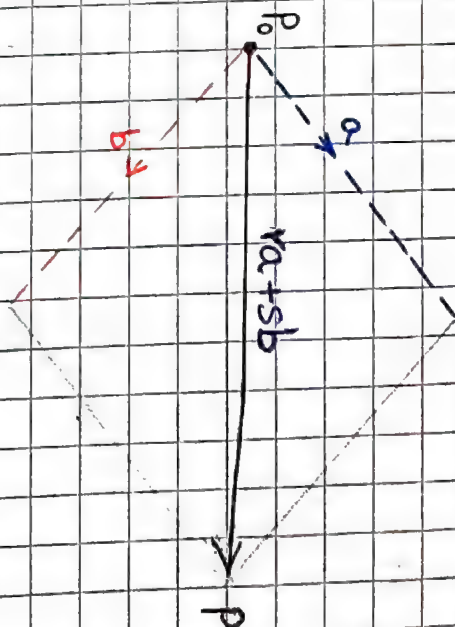
$$d(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = \left| \text{Proy}_{\vec{a} \times \vec{b}} \vec{Q_0 P_0} \right|$$

$$d(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = \frac{|\vec{Q_0 P_0} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$$

$$d(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = \frac{|\begin{vmatrix} Q_0 & P_0 & a & b \end{vmatrix}|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$$

DADOS:

P_0 : punto de paso del plano P
 a, b : dos vectores no nulos y no paralelos



luego, obtenemos $P = P_0 + ra + sb; \forall r, s \in \mathbb{R}$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + r(a_1, a_2, a_3) + s(b_1, b_2, b_3)$$

$$x = x_0 + ra_1 + sb_1$$

$$y = y_0 + ra_2 + sb_2$$

$$z = z_0 + ra_3 + sb_3$$

Recordemos:

$$n = (a, b, c)$$

$$\vec{n} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}$$

n : vector normal al plano

$$n \perp P$$

$$\Rightarrow (\vec{R_0P}) \cdot n = 0$$

ECUACIÓN NORMAL DEL PLANO P

De donde:

$$(\vec{P} - \vec{R_0}) \cdot n = 0$$

$$[(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)] \cdot (a, b, c) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ax + by + cz + d = 0 \end{array} \right\}$$

ECUACIÓN GENERAL O CARACTERÍSTICA

$$(x - x_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$\vec{R_0} = (x_0, y_0, z_0); n = (a, b, c)$$

POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS.

Sean los planos:

$$P_1: (\vec{R_0P}) \cdot n_1 = 0$$

$$P_2: (\vec{Q_0P}) \cdot n_2 = 0$$

$$i) P_1 \parallel P_2 \Leftrightarrow n_1 \parallel n_2 \quad (n_1 \times n_2 = 0)$$

$$ii) P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow n_1 \perp n_2 \quad (n_1 \cdot n_2 = 0)$$

ÁNGULOS ENTRE DOS PLANOS:

Sean los planos:

$$P_1: (\vec{R_0P}) \cdot n_1 = 0$$

$$P_2: (\vec{Q_0P}) \cdot n_2 = 0$$

$$\angle (P_1, P_2) = \angle (n_1, n_2) = \theta$$

$$\rightarrow \cos \theta = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| |n_2|}$$

se da como resultado el ángulo agudo ya sea en radian o grados.

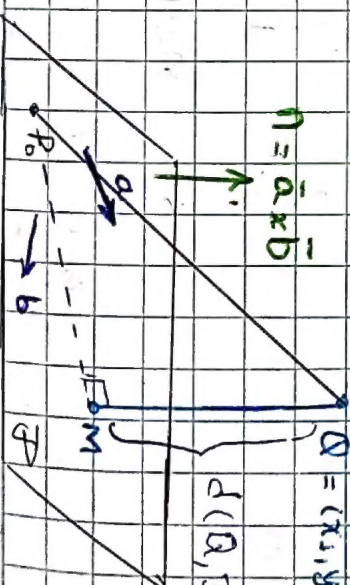
DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO:

$$n = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}$$

$$Q = (x_1, y_1, z_1)$$

$$d(Q, P) = |\vec{MQ}|$$

$$P: ax + by + cz + d = 0$$



$$d(Q, \mathcal{P}) = \left| \text{Proy}_{\vec{P_0 Q}} \right|_{a \times b}$$

$$d(Q, \mathcal{P}) = \left\| \frac{\vec{P_0 Q} \cdot (a \times b)}{|a \times b|} \right\| \cdot \underbrace{\left(\frac{|a \times b|}{|a \times b|} \right)}_1$$

$$d(Q, \mathcal{P}) = \left| \frac{\vec{P_0 Q} \cdot (a \times b)}{|a \times b|} \right|$$

$$d(Q, \mathcal{P}) = \frac{|[\vec{P_0 Q} \ a \ b]|}{|a \times b|}$$

Además:

$$d(Q, \mathcal{P}) = \frac{|(Q - P_0) \cdot n|}{|n|}$$

$$d(Q, \mathcal{P}) = \frac{((x_1, y_1, z_1) - (x_0, y_0, z_0)) \cdot (a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$d(Q, \mathcal{P}) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Reemplazas el punto Q en la ecuación del plano y listo.

$$d = ax + by + cz$$

POSICIONES RELATIVAS ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO

Sean:

$$\mathcal{P}: (P_0, \vec{p}) \cdot n = 0$$

$$\mathcal{L}: \{P | P = Q_0 + t a, t \in \mathbb{R}\}$$

$$i) \mathcal{L} \parallel \mathcal{P} \Leftrightarrow a \perp n \quad (a \cdot n = 0)$$

$$ii) \mathcal{L} \not\parallel \mathcal{P} \Leftrightarrow a \nparallel n \quad (a \cdot n \neq 0)$$

INTERSECCIÓN DE UNA RECTA Y UN PLANO NO PARALELO:

Sean:

$$\mathcal{P}: (\vec{P_0 P}) \cdot n = 0$$

$$\mathcal{L}: \{P | P = Q_0 + t a, t \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{L} \cap \mathcal{P} = M \quad \begin{cases} M \in \mathcal{L} \rightarrow M = Q_0 + t_1 a \\ M \in \mathcal{P} \rightarrow (\vec{P_0 M}) \cdot n = 0 \end{cases}$$

Es decir:

$$(M - P_0) \cdot n = 0$$

$$(Q_0 + t_1 a - P_0) \cdot n = 0$$

$$\rightarrow (Q_0 - P_0) \cdot n + L_1 a \cdot n = 0$$

$$L_1 = \frac{((P_0 - Q_0) \cdot n)}{a \cdot n}$$

$$\therefore M = Q_0 + \left(\frac{(P_0 - Q_0) \cdot n}{a \cdot n} \right) a$$

DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS PARALELOS

Sejam los planos:

$$\mathcal{P}_1: ax + by + cz = d_1$$

$$\mathcal{P}_2: ax + by + cz = d_2$$

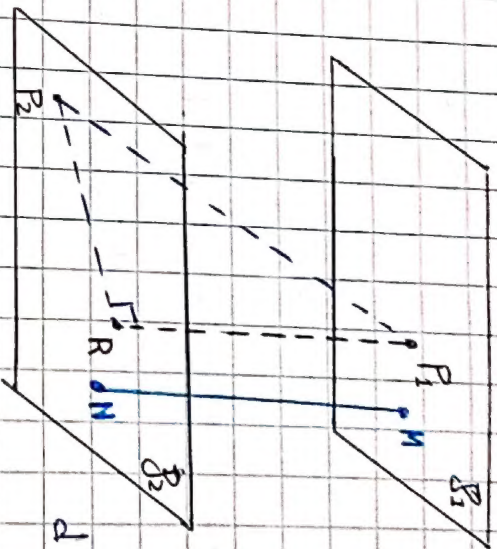
$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2 \\ n_1 = n_2 = (a, b, c) \end{array} \right\}$$

$$d(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = ?$$

$$P_1 \in \mathcal{P}_1 \rightarrow P_1 = (x_1, y_1, z_1)$$

$$P_2 \in \mathcal{P}_2 \rightarrow P_2 = (x_2, y_2, z_2)$$

Logo:



$$d(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = |\vec{MN}| = |\vec{P_1R}|$$

$$d(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \left| \text{Proj}_{\vec{P_2P_1}} \vec{P_1P_2} \right|$$

$$d(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \left| \left(\frac{(\vec{P_2P_1} \cdot \vec{n_2})}{|\vec{n_2}|} \right) \cdot \left(\frac{|\vec{n_2}|}{|\vec{n_2}|} \right) \right|$$

$$d(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \frac{|(P_1 - P_2) \cdot n_2|}{|n_2|}$$

$$d(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \frac{|(x_1, y_1, z_1) - (x_2, y_2, z_2) \cdot (a, b, c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$d(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \frac{|(ax_1 + by_1 + cz_1) - (ax_2 + by_2 + cz_2)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$d(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

INTERSECCIÓN DE m PLANOS

Sean m planos:

$$P_1: a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$P_2: a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$\vdots$$

$$P_m: a_mx + b_my + c_mz = d_m$$

i) $r(A_a) = r(A) = 3 \rightarrow$ la intersección de los m planos es un punto.

ii) $r(A_a) = r(A) = 2 \rightarrow$ la intersección de los m planos es una recta.

iii) $r(A_a) = r(A) = 1 \rightarrow$ la intersección de los m planos es un plano.

iv) $r(A_a) \neq r(A) \rightarrow$ ~~la~~ intersección de los m planos.

4 PC : rectas, planos y recteros.

EJERCICIOS :

Determinar la ecuación del plano π que contiene a la recta

$$r: \begin{cases} 3x + y - z = 3 \\ x - 2y + z = 5 \end{cases}$$

Además es ortogonal al plano : $2x - y + 3z = 2$

$$n_1 = (3, 1, -1)$$

$$n_2 = (1, -2, 1)$$

$$z = t$$

$$\rightarrow$$

$$3x + y = 3 + t$$

$$\rightarrow$$

$$x - 2y = 5 - t$$

$$3x - 6y = 15 - 3t$$

$$7y = -12$$

$$7y = -12 + 4t$$

$$x = \frac{11}{7}$$

$$y = -\frac{12}{7} + \frac{4}{7}t$$

$$z = t$$

$$x = \frac{11}{7} + \frac{1}{7}t$$